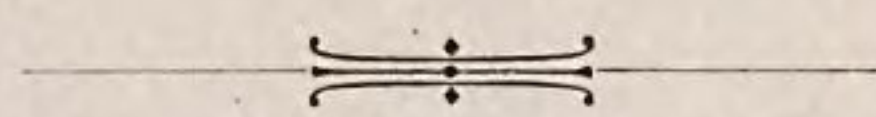


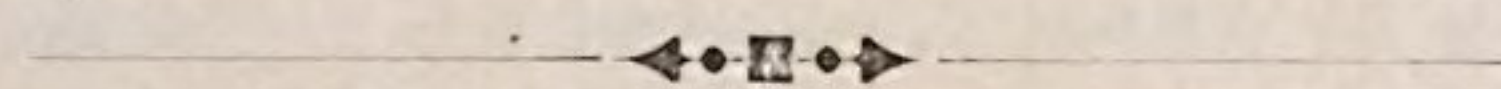
4

Über die
Bewegung einer inkompressibeln Flüssigkeit,
welche begrenzt ist von zwei in gegebener
Rotation befindlichen Flächen.



In a u g u r a l - D i s s e r t a t i o n
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität
zu T ü b i n g e n
eingereicht von
K a r l W a g n e r
aus Stuttgart.

5



Stuttgart.
Druck von Carl Hammer.
1888.

Angenommen von der naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität
Tübingen am 28. November 1888.

Der Verfasser fühlt sich gedrungen, seinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. Carl Neumann für die Anregung zu vorliegender Arbeit und für das Interesse, welches er an derselben nahm, auch an dieser Stelle seinen aufrichtigen Dank auszusprechen.

In Betreff der Bezeichnungsweise der im Folgenden verwendeten Theorie der Kugelfunktionen hat sich der Verfasser an die von Franz Neumann eingeführte gehalten. Vergl. Franz Neumann, Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen. Herausgegeben von Prof. Dr. Carl Neumann. Leipzig, bei B. G. Teubner. 1887.

§. 1.

Formulierung der Aufgabe.

Das Problem, das im Folgenden behandelt werden soll, lautet:

Es sind zwei Rotationsflächen mit gemeinsamer Achse gegeben, also, um die Vorstellung zu fixiren, etwa zwei konzentrische Kugelflächen mit Mittelpunkt O . Die Rotationsachse denken wir uns vertikal gestellt; sie dient zugleich als x -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems (xyz) , dessen Anfangspunkt sich in O befinden möge, so dass die yz -Ebene die Äquatorebene repräsentiert. Der schalenförmige Raum zwischen beiden Flächen ist mit einer inkompressibeln Flüssigkeit ausgefüllt. Beide Begrenzungsflächen werden nun, jede für sich, irgendwie in Rotation um die x -Achse versetzt. In Folge der Adhäsion, welche zwischen der Flüssigkeit und den Begrenzungs-

flächen stattfindet, und der Reibung der Flüssigkeitsteilchen an einander, werden zunächst die dem Rande benachbarten Teilchen der Flüssigkeit gezwungen, an der Bewegung teilzunehmen, dann die weiter entfernter liegenden, bis schliesslich die ganze Flüssigkeit in Rotationsbewegung geraten ist.

Unsere Aufgabe soll nun darin bestehen, zu untersuchen, wie diese rotierende Bewegung der Flüssigkeit des Näheren beschaffen ist; mit andern Worten, es soll die Geschwindigkeit eines beliebigen Flüssigkeitsteilchens als Funktion seiner Koordinaten und der Zeit angegeben werden. Und zwar ziehen wir folgende vier spezielle Fälle in Betracht, in denen als Begrenzungsflächen gegeben sind:

1. zwei koaxiale Kreiscylinder;
2. zwei konzentrische Kugelflächen;
3. zwei konfokale Ellipsoïdflächen;
4. zwei exzentrische Kugelflächen.

Ausserdem machen wir die Voraussetzungen, dass von den Begrenzungsflächen jede mit einer gegebenen konstanten Winkelgeschwindigkeit rotiert und dass äussere Kräfte, auch die Schwere, überhaupt nicht einwirken. Es wird alsdann auch die Flüssigkeit bald in eine solche Bewegung geraten, welche von der Zeit unabhängig ist. Um die Ermittlung dieses „stationären“ Zustandes soll es sich in erster Linie handeln. Es sind aber auch mancherlei „nicht stationäre“ Zustände denkbar; es kann z. B. angenommen werden, die Flüssigkeit befinde sich in dem Moment, in welchem man die Rotationen der Begrenzungsflächen beginnen lässt, schon in einem beliebigen gegebenen Anfangszustand. Offenbar wird jetzt ein Zustand eintreten, der von Moment zu Moment sich ändert, d. h. der wesentlich von der Zeit abhängt. Derartiges soll an zweiter Stelle in Betracht gezogen werden.

Das Fundament der ganzen Untersuchung bilden die allgemeinen Differentialgleichungen der Bewegung einer inkompressibeln Flüssigkeit, wie sie unter Berücksichtigung der Reibung zuerst von Stokes aufgestellt wurden. Sie lauten:

$$\left\{ \begin{array}{l} D \frac{du}{dt} = DX - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \Delta u \\ D \frac{dv}{dt} = DY - \frac{\partial p}{\partial y} + \eta \Delta v \\ D \frac{dw}{dt} = DZ - \frac{\partial p}{\partial z} + \eta \Delta w \end{array} \right.$$

Dabei bedeutet D die konstante Dichtigkeit der Flüssigkeit, η die Reibungskonstante derselben; ferner sind (xyz) die rechtwinkligen Koordinaten eines beliebigen Punktes der Flüssigkeit und p der daselbst vorhandene Druck; endlich sind (uvw) die Geschwindigkeitskomponenten und (XYZ) die Komponenten einer auf den Punkt wirkenden äusseren Kraft. Unter Δu , Δv , Δw sind die bekannten Laplace'schen Ausdrücke verstanden:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \Delta v \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ \Delta w \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \end{array} \right.$$

Diese allgemeinen Differentialgleichungen der Bewegung lassen sich auf Grund unserer speziellen Voraussetzungen einfacher gestalten.

Zunächst sind äussere Kräfte überhaupt nicht wirksam, also ist:

$$X = Y = Z = 0.$$

Sodann ist unsere Bewegung von spezieller Natur, nämlich eine rotierende. Wir führen dementsprechend an Stelle der Geschwindigkeitskomponenten (uvw) gewisse andere Komponenten (UVW) ein und zwar in folgender Weise: Durch den betrachteten Punkt (xyz) der Flüssigkeit denken wir uns eine Horizontalebene gelegt, ziehen in derselben von ihrem Durchschnittspunkt mit der Rotationsachse aus eine Gerade nach dem Punkt (xyz) und errichten auf dieser Geraden im Punkt

(xyz) zwei Senkrechte und zwar die eine in dieser Horizontalebene nach der Seite der momentanen Bewegungsrichtung des Punktes hin und die andere senkrecht auf der genannten Horizontalebene in der Richtung der positiven x Achse. Die Komponenten der Geschwindigkeit des Punktes nach diesen 3 auf einander senkrechten Richtungen benennen wir der Reihe nach mit V , W und U . Bezeichnen wir den Winkel der Meridianebene des Punktes (xyz) gegen die feste (xy) Ebene mit φ , so lassen sich die Relationen, welche zwischen (u, v, w) und (U, V, W) stattfinden, in einfacher Weise angeben. Die 3 Komponenten $-U$, $-V$, $-W$ müssen u, v, w das Gleichgewicht halten, was nach den Sätzen der Mechanik über das Gleichgewicht eines Punktes im Raum zu den 3 Gleichungen führt:

$$\begin{cases} u - U &= 0 \\ v - V \cos \varphi + W \sin \varphi &= 0 \\ w - W \cos \varphi - V \sin \varphi &= 0. \end{cases}$$

Nun ist aber die in Rede stehende Bewegung eine Rotationsbewegung, demnach ist die Geschwindigkeit des Punktes einfach durch die Komponente W selber repräsentiert, während U und V Null sind. Die Gleichungen lauten also einfach:

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = -W \sin \varphi \\ w = W \cos \varphi. \end{cases}$$

Hiernach nehmen nun die allgemeinen Differentialgleichungen der Bewegung folgende Gestalt an:

$$(A.) \quad \left. \begin{aligned} &0 = -\frac{\partial p}{\partial x} \\ &D \frac{d(-W \sin \varphi)}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \Delta(-W \sin \varphi) \\ &D \frac{d(W \cos \varphi)}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \Delta(W \cos \varphi) \end{aligned} \right\}$$

und das jetzt rein mathematische Problem besteht darin, für die oben genannten speziellen Fälle die Geschwindigkeit W des Punktes (xyz) auf Grund der Differentialgleichungen (A.) zu bestimmen.

Da oben die Voraussetzung gemacht wurde, dass die Begrenzungsflächen mit konstanten Winkelgeschwindigkeiten rotieren, so lässt sich sogleich hier die Folgerung ziehen, dass sowohl der Druck p , als auch die Geschwindigkeit W jedes Punktes der Flüssigkeit vom Drehungswinkel φ unabhängig ist.

§. 2.

Koaxiale Cylinder als Begrenzungsflächen.

Als Begrenzungsflächen sind zwei koaxiale Kreiscylinder mit den Radien r' und r'' und der x Achse als Achse gegeben. Was das Koordinatensystem betrifft, das im vorliegenden Falle zu Grunde gelegt werden soll, so bieten sich offenbar die Cylinderkoordinaten $(xr\varphi)$ als die geeignetsten dar. Die einfachen Beziehungen zwischen ihnen und den rechtwinkligen Koordinaten (xyz) eines Punktes lauten bekanntlich

$$\begin{cases} x = x \\ y = r \cos \varphi \\ z = r \sin \varphi. \end{cases}$$

Die Funktionen W und p werden durch diese Substitutionen von den Variablen x , r und φ abhängig gemacht oder sie werden, genauer ausgedrückt, nur von der einzigen Variablen r abhängen, was wir durch $W = W(r)$ und $p = p(r)$ andeuten. Denn erstens wurde schon oben die Unabhängigkeit beider Funktionen von φ hervorgehoben und zweitens ist der Zustand der rotierenden Flüssigkeit in jeder Horizontalebene der nämliche, was auch die Unabhängigkeit der Funktionen von x zur Folge hat.

1). Übertragung der Differentialgleichungen (A.) auf Cylinderkoordinaten.

Zunächst handelt es sich um die Transformation der Gleichungen (A.) pag. 6) auf die neuen Koordinaten. Die Differentiation der obigen Koordinatenrelationen ergibt:

$$\begin{cases} dx = dx \\ dy = \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi \\ dz = \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi, \end{cases}$$

woraus man durch Auflösen nach den Zunahmen der neuen Variabeln die Gleichungen erhält:

$$\begin{cases} dx = dx \\ dr = dy \cos \varphi + dz \sin \varphi \\ d\varphi = -\frac{dy \sin \varphi}{r} + \frac{dz \cos \varphi}{r} \end{cases}$$

Aus den letzteren lassen sich die folgenden partiellen Differentialquotienten ablesen:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial x} = 1; & \frac{\partial r}{\partial x} = 0; & \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial x}{\partial y} = 0; & \frac{\partial r}{\partial y} = \cos \varphi; & \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\sin \varphi}{r}; \\ \frac{\partial x}{\partial z} = 0; & \frac{\partial r}{\partial z} = \sin \varphi; & \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\cos \varphi}{r}; \end{cases}$$

und auf Grund derselben wird:

$$(\alpha.) \quad \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial r} \cos \varphi \text{ und} \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial r} \sin \varphi. \end{cases}$$

Der Laplace'sche Ausdruck

$$\Delta f(xyz) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

lautet bekanntlich in Cylinderkoordinaten:

$$\Delta f(xr\varphi) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}.$$

Hiernach haben wir zu bilden:

$$\text{und} \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta(-W \sin \varphi) &\equiv \frac{\partial^2(-W \sin \varphi)}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial(-W \sin \varphi)}{\partial r} \right) \\ &\quad + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2(-W \sin \varphi)}{\partial \varphi^2} \\ \Delta(W \cos \varphi) &\equiv \frac{\partial^2(W \cos \varphi)}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial(W \cos \varphi)}{\partial r} \right) \\ &\quad + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2(W \cos \varphi)}{\partial \varphi^2} \end{aligned} \right.$$

und dabei zu beachten, dass W nur von r abhängt. Demnach verschwindet beidemal der erste Term und aus den beiden ersten Gliedern lässt sich der Faktor $\sin \varphi$ beziehungsweise $\cos \varphi$ heraussetzen. Auf diese Weise erhält man:

$$(\beta.) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta(-W \sin \varphi) &\equiv -\sin \varphi \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial W}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} W \right] \text{ und} \\ \Delta(W \cos \varphi) &\equiv \cos \varphi \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial W}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} W \right]. \end{aligned} \right.$$

Beachtet man nun noch, dass W auch eine Funktion der Zeit t ist und setzt die Werte $(\alpha.)$ und $(\beta.)$ in (A.) ein, so erhält man die beiden Gleichungen:

$$\text{und} \quad \left\{ \begin{aligned} D \sin \varphi \frac{\partial W}{\partial t} + D W \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \frac{\partial p}{\partial r} \cos \varphi \\ &\quad + \eta \sin \varphi \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial W}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} W \right] \\ D \cos \varphi \frac{\partial W}{\partial t} - D W \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial r} \sin \varphi \\ &\quad + \eta \cos \varphi \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial W}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} W \right], \end{aligned} \right.$$

welche durch Elimination von p und $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ folgende Differentialgleichung für $W(r, t)$ ergeben:

$$(I) \quad \dots \dots \frac{D}{\eta} \cdot \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial W}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} W.$$

2). Untersuchung des stationären Zustandes.

Die beiden Randflächen befinden sich in gegebenen Rotationen: die Cylinder mit den Radien r' und r'' mögen die konstanten Winkelgeschwindigkeiten A' und A'' besitzen. Der Zustand, für den wir in erster Linie die Geschwindigkeit W ermitteln wollen, ist der im Eingang genannte, stationäre, von der Zeit t unabhängige. Für diesen wird also $\frac{\partial W}{\partial t} = 0$ sein, so dass die Differentialgleichung (I.) jetzt lautet:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial W}{\partial r} \right) - \frac{W}{r} = 0 \quad \text{oder:}$$

$$(1) \quad \dots \dots r^2 \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + r \frac{\partial W}{\partial r} - W = 0.$$

Von der Funktion W sind ausser dieser Differentialgleichung, der sie genügt, auch noch die Werte bekannt, welche sie an den beiden Begrenzungsflächen besitzt. Denn W repräsentiert, wie wir sahen, die Geschwindigkeit des Flüssigkeitsteilchens an der Stelle $(x r \varphi)$; diejenigen Teilchen aber, welche an den beiden Randflächen liegen, d. h. welche die Koordinaten $(x r' \varphi)$ und $(x r'' \varphi)$ besitzen, haben die gegebenen Geschwindigkeiten $r' A'$ und $r'' A''$. Die Funktion $W(r)$ muss also für $r = r'$ beziehungsweise $r = r''$ übergehen in $r' A'$ beziehungsweise $r'' A''$. Ausser der Bedingung (1.) hat demnach die Funktion $W(r)$ auch noch den zwei Randbedingungen:

$$(2) \quad \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} W(r') \equiv r' A' \\ W(r'') \equiv r'' A'' \end{array} \right.$$

Genüge zu leisten.

Auf Grund dieser Eigenschaften der Funktion W gestaltet

sich deren Ermittlung in folgender Weise. Zuvörderst lässt sich die Differentialgleichung (1) mittelst Reihenentwicklung integrieren. Wir denken uns hiezu $W(r)$ in eine nach steigenden und fallenden Potenzen von r fortschreitende Reihe entwickelt, was gestattet ist, da $W(r)$ offenbar innerhalb des schalenförmigen Raumes durchaus eindeutig und stetig ist. Wir setzen also:

$$(4.) \quad \dots \quad W(r) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \{A_n r^n + B_{n+1} r^{-(n+1)}\},$$

wo die A_n und B_{n+1} unbestimmte, in der Folge zu ermittelnde konstante Koeffizienten vorstellen. Hieraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial r} &= \sum_{n=0}^{n=\infty} \{n A_n r^{n-1} - (n+1) B_{n+1} r^{-(n+2)}\} \\ \text{und} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} &= \sum_{n=0}^{n=\infty} \{n(n-1) A_n r^{n-2} + (n+1)(n+2) B_{n+1} r^{-(n+3)}\}. \end{aligned}$$

Setzen wir diese Werte in Gleichung (1) ein, so erhalten wir für die Koeffizienten A_n und B_{n+1} die Bedingungsgleichung:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \{[n(n-1) + n - 1] A_n r^n + [(n+1)(n+2) - (n+1) - 1] B_{n+1} r^{-(n+1)}\} = 0$$

oder:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \{n^2 - 1) A_n r^n + n(n+2) B_{n+1} r^{-(n+1)}\} = 0.$$

Diese Potenzreihe soll für alle Werte von r zwischen den Grenzen r' und r'' den Wert Null haben. Einem bekannten Satz zufolge müssen demnach die Koeffizienten der Reihe einzeln Null sein, d. h. die A_n und B_{n+1} müssen den Bedingungen genügen:

$$\begin{cases} (n^2 - 1) A_n = 0 \\ n(n + 2) B_{n+1} = 0, \end{cases}$$

aus denen ersichtlich ist, dass mit alleiniger Ausnahme von A_1 und B_1 , welche willkürlich bleiben, die sämtlichen übrigen Koeffizienten Null sein müssen (n repräsentiert nur positive ganze Zahlen). Die Reihe (4) für W lautet also einfach:

$$(5) \quad \dots \dots \dots W(r) = A_1 r + B_1 r^{-1}.$$

Die Anwendung dieser allgemein gültigen Formel speziell auf die Randpunkte gestattet schliesslich mit Rücksicht auf die Bedingungen (2) und (3) die Ermittlung der Konstanten A_1 und B_1 , für die man die Gleichungen erhält:

$$\begin{cases} W(r') \equiv r' A' = A_1 r' + \frac{B_1}{r'} \quad \text{und} \\ W(r'') \equiv r'' A'' = A_1 r'' + \frac{B_1}{r''}. \end{cases}$$

Hieraus ergeben sich für A_1 und B_1 die Werte:

$$(6) \quad \dots \dots \dots \begin{cases} A_1 = \frac{A'' r''^2 - A' r'^2}{r''^2 - r'^2} \\ B_1 = \frac{(A' - A'') r'^2 r''^2}{r''^2 - r'^2}. \end{cases}$$

Die gesuchte Funktion lautet also:

$$(7) \quad \dots \quad W(r) = \frac{A'' r''^2 - A' r'^2}{r''^2 - r'^2} r + \frac{(A' - A'') r'^2 r''^2}{r''^2 - r'^2} r^{-1}.$$

Daraus, dass W von r allein abhängt, dass demnach sämtlichen Punkten, welche ein und dasselbe r , aber ein beliebiges x und φ besitzen, d. h. welche auf einem koaxialen Cylinder vom Radius r liegen, derselbe Wert von W zukommt, geht der folgende Satz hervor, in welchen wir das Resultat zusammenfassen:

Satz: Während des auf die angegebene Weise entstandenen stationären Zustandes geht die Bewegung der Flüssig-

keit derart vor sich, dass sich die ganze Flüssigkeit in lauter unendlich dünne koaxiale Cylinder spaltet und jeder solcher Cylinder wie ein fester Körper rotiert. Die Winkelgeschwindigkeit eines derartigen Cylinders vom Radius r ist $\frac{W}{r}$, wobei W die in (7) genannte Funktion vorstellt, r' und r'' sind die Radien, A' und A'' die gegebenen konstanten Winkelgeschwindigkeiten der begrenzenden Cylinderflächen.

Einige Spezialisierungen mögen bei dem im folgenden Paragraphen zu behandelnden Falle der Kugelflächen vorgenommen werden.

§. 3.

Konzentrische Kugeln als Begrenzungsflächen.

Um den Anfangspunkt O des rechtwinkligen Koordinatensystems (xyz) mit vertikal nach oben gerichteter x -Achse sind zwei Kugelflächen mit den Radien r' und r'' beschrieben und die so entstandene Kugelschale ist mit der inkompressibeln Flüssigkeit ausgefüllt. An Stelle der Koordinaten (xyz) wird es sich empfehlen, die Polarkoordinaten $(r \omega \varphi)$ einzuführen, wo r den Abstand des Punktes (xyz) vom Ursprung, ω das Komplement der geographischen Breite und φ die geographische Länge des Punktes bedeutet. Die bekannten Relationen, welche beide Koordinatensysteme verknüpfen, lauten:

$$\begin{cases} x = r \cos \omega \\ y = r \sin \omega \cos \varphi \\ z = r \sin \omega \sin \varphi. \end{cases}$$

1). Übertragung der Differentialgleichungen (A.) auf Kugelkoordinaten.

Die erste Aufgabe besteht in der Transformation der Differentialgleichungen (A.) pag. 6) auf die neuen Koordinaten. Die Differentiation obiger Relationen gibt:

$$\begin{cases} dx = \cos \omega dr - r \sin \omega d\omega \\ dy = \sin \omega \cos \varphi dr + r \cos \omega \cos \varphi d\omega - r \sin \omega \sin \varphi d\varphi \\ dz = \sin \omega \sin \varphi dr + r \cos \omega \sin \varphi d\omega + r \sin \omega \cos \varphi d\varphi, \end{cases}$$

woraus man durch Auflösen nach den Zunahmen der neuen Variabeln die Gleichungen erhält:

$$\begin{cases} dr = dx \cos \omega + dy \sin \omega \cos \varphi + dz \sin \omega \sin \varphi \\ d\omega = -\frac{dx \sin \omega}{r} + \frac{dy \cos \omega \cos \varphi}{r} + \frac{dz \cos \omega \sin \varphi}{r} \\ d\varphi = 0 - \frac{dy \sin \varphi}{r \sin \omega} + \frac{dz \cos \varphi}{r \sin \omega}. \end{cases}$$

Hieraus lassen sich die folgenden partiellen Differentialquotienten ablesen:

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial x} = \cos \omega; & \frac{\partial \omega}{\partial x} = -\frac{\sin \omega}{r}; & \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \omega \cos \varphi; & \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\cos \omega \cos \varphi}{r}; & \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{-\sin \varphi}{r \sin \omega}; \\ \frac{\partial r}{\partial z} = \sin \omega \sin \varphi; & \frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{\cos \omega \sin \varphi}{r}; & \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\cos \varphi}{r \sin \omega}. \end{cases}$$

Durch die Koordinatentransformation gehen die Funktionen $p(xyz)$ und $W(xyz)$ über in neue Funktionen $p(r\omega\varphi)$ und $W(r\omega\varphi)$, wobei wir aber im Auge zu behalten haben, dass, wie oben bemerkt wurde, p ebenso wie W von φ unabhängig ist. Wenn wir demnach die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial p}{\partial y}$ und $\frac{\partial p}{\partial z}$ bilden, so erhalten wir:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} \text{ und} \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z} \end{cases}$$

oder mit Hilfe obiger Relationen:

$$(\alpha.) \quad \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial y} = \left(\frac{\partial p}{\partial r} \sin \omega + \frac{\partial p}{\partial \omega} \cdot \frac{\cos \omega}{r} \right) \cos \varphi \text{ und} \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \left(\frac{\partial p}{\partial r} \sin \omega + \frac{\partial p}{\partial \omega} \cdot \frac{\cos \omega}{r} \right) \sin \varphi. \end{cases}$$

Der Laplace'sche Ausdruck $\Delta f(xyz)$ auf Polarkoordinaten übertragen lautet:

$$\Delta f(r\omega\varphi) \equiv \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \omega} \cdot \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\sin \omega \frac{\partial f}{\partial \omega} \right) + \frac{1}{\sin^2 \omega} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right\}.$$

Hiernach haben wir zu bilden:

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta(-W \sin \varphi) &\equiv \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial (-W \sin \varphi)}{\partial r} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sin \omega} \cdot \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\sin \omega \frac{\partial (-W \sin \varphi)}{\partial \omega} \right) + \frac{1}{\sin^2 \omega} \cdot \frac{\partial^2 (-W \sin \varphi)}{\partial \varphi^2} \right] \\ \Delta(W \cos \varphi) &\equiv \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial (W \cos \varphi)}{\partial r} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sin \omega} \cdot \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\sin \omega \frac{\partial (W \cos \varphi)}{\partial \omega} \right) + \frac{1}{\sin^2 \omega} \cdot \frac{\partial^2 (W \cos \varphi)}{\partial \varphi^2} \right]. \end{aligned} \right.$$

Wenn wir beachten, dass die Funktion W von φ unabhängig ist, so vereinfachen sich diese Ausdrücke einigermaßen, indem sich der Faktor $\sin \varphi$ beziehungsweise $\cos \varphi$ heraussetzen lässt. Dadurch erscheint in der Klammer beidemal dasselbe Aggregat von Gliedern:

$$(\beta). \left\{ \begin{aligned} \Delta(-W \sin \varphi) &\equiv -\frac{\sin \varphi}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial W}{\partial r} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sin \omega} \cdot \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\sin \omega \frac{\partial W}{\partial \omega} \right) - \frac{W}{\sin^2 \omega} \right] \\ \Delta(W \cos \varphi) &\equiv \frac{\cos \varphi}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial W}{\partial r} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sin \omega} \cdot \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\sin \omega \frac{\partial W}{\partial \omega} \right) - \frac{W}{\sin^2 \omega} \right]. \end{aligned} \right.$$

Mit Hilfe der Formeln (α .) und (β .) erhält man aus (A.) zwei Gleichungen, aus denen sich der Druck p einfach eliminieren lässt. Man erhält die Gleichung:

$$\frac{D}{\eta} \cdot \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial W}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \omega} \cdot \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\sin \omega \frac{\partial W}{\partial \omega} \right) - \frac{W}{\sin^2 \omega} \right\},$$

welche W allein enthält und die wir noch durch einige Substitutionen in eine etwas andere Gestalt versetzen. Die Kon-

stante $\frac{D}{\eta}$ bezeichnen wir kurz mit ε , sodann setzen wir, wie es in der Theorie der Kugelfunktionen üblich ist, zur Abkürzung:

$$\begin{aligned}\cos \omega &= \mu, \text{ also} \\ \sin \omega &= \sqrt{1 - \mu^2} \text{ und} \\ d\omega &= \frac{-d\mu}{\sqrt{1 - \mu^2}},\end{aligned}$$

so dass die Funktion $W(r\omega t)$ jetzt als Funktion $W(r\mu t)$ erscheint. Endlich führen wir an Stelle von $W(r\mu t)$ eine andere Funktion $G(r\mu t)$ ein, welche mit jener in der Beziehung steht:

$$(\gamma.) \dots\dots\dots r \cdot W = G.$$

Durch diese Substitutionen geht die in Rede stehende Differentialgleichung schliesslich in die Form über:

$$(I.) \dots - \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \left\{ r^2 \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial G}{\partial \mu} \right) - \frac{G}{1 - \mu^2} \right\} = 0.$$

2). Untersuchung des stationären Zustandes.

Die beiden Kugelflächen sind beziehungsweise mit den konstanten Winkelgeschwindigkeiten A' und A'' in Rotation um die x -Achse versetzt worden. Es soll der dadurch entstehende stationäre Zustand der Flüssigkeit, d. h. die diesem Zustand entsprechende Funktion W oder G angegeben werden.

Die obige ganz allgemein gültige Differentialgleichung (I.) muss auch für den vorliegenden Fall gelten; sie vereinfacht sich dadurch, dass G von der Zeit unabhängig, also $\frac{\partial G}{\partial t} = 0$ ist. In erster Linie muss G demnach der Differentialgleichung:

$$(1.) \dots \left\{ \begin{aligned} r^2 \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial G}{\partial \mu} \right) - \frac{G}{1 - \mu^2} &= 0 \text{ oder} \\ r^2 \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + (1 - \mu^2) \frac{\partial^2 G}{\partial \mu^2} - 2\mu \frac{\partial G}{\partial \mu} - \frac{G}{1 - \mu^2} &= 0 \end{aligned} \right.$$

genügen. Sodann sind noch die Randbedingungen in Betracht zu ziehen. Ein beliebiger Punkt der einen Kugelfläche, dem die Koordinaten $(r' \omega \varphi)$ zukommen, besitzt bei der Rotation die Geschwindigkeit $r' A' \sin \omega$ oder $r' A' \sqrt{1 - \mu^2}$ und ebenso wird ein beliebiger Punkt $(r'' \omega \varphi)$ der andern Kugelfläche die Geschwindigkeit $r'' A'' \sin \omega$ oder $r'' A'' \sqrt{1 - \mu^2}$ haben. Dies sind aber die Werte, welche die Funktion W an den Randflächen annehmen muss. Für W ergeben sich also noch die weiteren Bedingungen:

$$\begin{aligned} (2.) \quad & \dots \dots \dots \left\{ \begin{aligned} W(r' \mu) &= r' A' \sqrt{1 - \mu^2} \\ W(r'' \mu) &= r'' A'' \sqrt{1 - \mu^2}, \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

welche für G lauten:

$$\begin{aligned} (2') \quad & \dots \dots \dots \left\{ \begin{aligned} G(r' \mu) &= r'^2 A' \sqrt{1 - \mu^2} \\ G(r'' \mu) &= r''^2 A'' \sqrt{1 - \mu^2}. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Wir wenden uns jetzt zur Integration der Differentialgleichung. Zu diesem Zwecke denken wir uns die Funktion W in eine nach steigenden und fallenden Potenzen von r fortschreitende Reihe entwickelt, was gestattet ist, da W seiner Bedeutung nach in dem schalenförmigen Raum eindeutig und stetig ist. Wir setzen also:

$$(4.) \quad \dots \dots \quad W(r \mu) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ f_n(\mu) \cdot r^n + \varphi_{n+1}(\mu) r^{-(n+1)} \right\}$$

und somit gemäss (γ.)

$$G(r \mu) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ f_n(\mu) \cdot r^{n+1} + \varphi_{n+1}(\mu) r^{-n} \right\},$$

wo $f_n(\mu)$ und $\varphi_{n+1}(\mu)$ bis jetzt noch unbekannte Funktionen von μ bedeuten. Wir bilden die Differentialquotienten:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} &= \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(n(n+1) f_n(\mu) r^{n-1} + n(n+1) \varphi_{n+1}(\mu) r^{-(n+2)} \right) \\ \frac{\partial G}{\partial \mu} &= \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{\partial f_n}{\partial \mu} r^{n+1} + \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial \mu} r^{-n} \right) \\ \frac{\partial^2 G}{\partial \mu^2} &= \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{\partial^2 f_n}{\partial \mu^2} r^{n+1} + \frac{\partial^2 \varphi_{n+1}}{\partial \mu^2} r^{-n} \right) \end{aligned} \right.$$

und tragen dieselben in die Gleichung (1.) ein, wodurch wir erhalten:

$$0 = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ \left[n(n+1) f_n(\mu) + (1-\mu^2) \frac{\partial^2 f_n}{\partial \mu^2} - 2\mu \frac{\partial f_n}{\partial \mu} - \frac{f_n(\mu)}{1-\mu^2} \right] r^{n+1} + \left[n(n+1) \varphi_{n+1}(\mu) + (1-\mu^2) \frac{\partial^2 \varphi_{n+1}}{\partial \mu^2} - 2\mu \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial \mu} - \frac{\varphi_{n+1}}{1-\mu^2} \right] r^{-n} \right\}.$$

Diese Gleichung hat Gültigkeit für alle Werte von r zwischen den Grenzen r' und r'' ; demnach müssen einem bekannten Satz zufolge die Koeffizienten der Potenzen von r einzeln Null sein, d. h. die unbekannten Funktionen $f_n(\mu)$ und $\varphi_{n+1}(\mu)$ müssen der Differentialgleichung

$$\left\{ n(n+1) - \frac{1}{1-\mu^2} \right\} H + (1-\mu^2) \frac{\partial^2 H}{\partial \mu^2} - 2\mu \frac{\partial H}{\partial \mu} = 0$$

genügen, wo man sich an Stelle des H das einmal die Funktion $f_n(\mu)$, das anderemal $\varphi_{n+1}(\mu)$ gesetzt zu denken hat. Dabei variiert μ zwischen $+1$ und -1 , weil ω zwischen 0 und π variiert, und n repräsentiert eine beliebige ganze Zahl aus der Reihe $0, 1, 2, 3, \dots, \infty$.

Aus der Theorie der Kugelfunktionen ist nun bekannt, dass vorstehender Differentialgleichung die adjungierten Kugelfunktionen erster und zweiter Art:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{n1}(\mu) \equiv (1 - \mu^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \mu} \\ Q_{n1}(\mu) \equiv (1 - \mu^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial Q_n(\mu)}{\partial \mu} \end{array} \right. \quad \text{und}$$

als die beiden partikulären Integrale derselben genügen. Das vollständige Integral H besitzt also die Form:

$$H = A P_{n1}(\mu) + B Q_{n1}(\mu),$$

wo A und B willkürliche Konstanten bedeuten. Für die Funktionen $f_n(\mu)$ und $\varphi_{n+1}(\mu)$ ergeben sich hieraus die folgenden Darstellungen:

$$(5.) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_n(\mu) = A_n P_{n1}(\mu) + B_n Q_{n1}(\mu) \\ \varphi_{n+1}(\mu) = A_n P_{n1}(\mu) + B_n Q_{n1}(\mu) \end{array} \right. \quad \text{und}$$

wobei die $A_n, B_n; A_n, B_n$ unbestimmte konstante Koeffizienten bedeuten, welche in der Folge den Grenzbedingungen der Funktion W entsprechend zu bestimmen sind.

Nach dem Bisherigen, zufolge (4) und (5), erscheint nun die Funktion W in folgender Gestalt:

$$\begin{aligned} W(r\mu) &= \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ [A_n P_{n1}(\mu) + B_n Q_{n1}(\mu)] r^n + [A_n P_{n1}(\mu) \right. \\ &\quad \left. + B_n Q_{n1}(\mu)] r^{-(n+1)} \right\} \\ \text{oder:} \quad W(r\mu) &= \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ [A_n r^n + A_n r^{-(n+1)}] P_{n1}(\mu) + [B_n r^n \right. \\ &\quad \left. + B_n r^{-(n+1)}] Q_{n1}(\mu) \right\}. \end{aligned}$$

Diese Darstellung soll Gültigkeit haben für alle Werte von r zwischen den Grenzen r' und r'' und für alle Werte von μ zwischen den Grenzen $+1$ und -1 . Machen wir hiervon eine Anwendung auf die in der Drehachse liegenden Flüssigkeitsteilchen, welche bei der Rotation in Ruhe bleiben, für welche also $W = 0$ ist und denen die Werte $\mu = \pm 1$ zukommen, so erhalten wir:

$$0 = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ [A_n r^n + \mathcal{A}_n r^{-(n+1)}] P_{n1}(\pm 1) + [B_n r^n + B_n r^{-(n+1)}] Q_{n1}(\pm 1) \right\}.$$

Aus der Theorie der Kugelfunktionen ist aber bekannt, dass

$$P_{n1}(\pm 1) = 0 \quad \text{und} \quad Q_{n1}(\pm 1) = \infty \quad \text{ist.}$$

Soll also vorstehende Gleichung bestehen können, so müssen notwendig alle Koeffizienten B_n und B_n Null sein, so dass die Funktion nunmehr folgendermassen lautet:

$$(6.) \quad \dots \quad W(r\mu) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ A_n r^n + \mathcal{A}_n r^{-(n+1)} \right\} P_{n1}(\mu).$$

Es handelt sich nun noch um die Ermittlung der unbekannten Konstanten A_n und $\mathcal{A}_n$ auf Grund der vorgeschriebenen Randwerte der Funktion W . Mit $r = r'$ und $r = r''$ erhalten wir nach (2), (3) und (6):

$$\left\{ \begin{array}{l} W(r'\mu) = r' A' \sqrt{1-\mu^2} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(A_n r'^n + \mathcal{A}_n r'^{-(n+1)} \right) P_{n1}(\mu) \quad \text{und} \\ W(r''\mu) = r'' A'' \sqrt{1-\mu^2} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(A_n r''^n + \mathcal{A}_n r''^{-(n+1)} \right) P_{n1}(\mu). \end{array} \right.$$

Bekanntlich lässt sich aber die Wurzelgrösse $\sqrt{1-\mu^2}$ auch als eine Kugelfunktion erster Art auffassen; es ist nämlich:

$$\sqrt{1-\mu^2} = P_{11}(\mu).$$

Wir erhalten demnach für die A_n und $\mathcal{A}_n$ die zwei Bedingungen:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \left(A_0 + \frac{\mathcal{A}_0}{r'} \right) P_{01}(\mu) + \left(A_1 r' - \mathcal{A}' r' + \frac{\mathcal{A}_1}{r'^2} \right) P_{11}(\mu) \\ \quad \quad \quad + \left(A_2 r'^2 + \frac{\mathcal{A}_2}{r'^3} \right) P_{21}(\mu) + \dots \\ 0 = \left(A_0 + \frac{\mathcal{A}_0}{r''} \right) P_{01}(\mu) + \left(A_1 r'' - \mathcal{A}'' r'' + \frac{\mathcal{A}_1}{r''^2} \right) P_{11}(\mu) \\ \quad \quad \quad + \left(A_2 r''^2 + \frac{\mathcal{A}_2}{r''^3} \right) P_{21}(\mu) + \dots \end{array} \right.$$

Soll aber eine nach den adjungierten Kugelfunktionen $P_{n1}(\mu)$ fortschreitende Reihe für alle Werte von μ zwischen $+1$ und -1 verschwinden, so ist dazu erforderlich, dass sämtliche Koeffizienten der Reihe einzeln verschwinden. Es müssen also folgende Gleichungen erfüllt sein:

$$\begin{cases} A_n r'^n + \frac{A_n}{r'^{n+1}} = 0 \\ A_n r''^n + \frac{A_n}{r''^{n+1}} = 0 \end{cases} \quad \text{für } n = 0, 2, 3, 4, \dots \infty$$

und

$$\begin{cases} (A_1 - A') r' + \frac{A_1}{r'^2} = 0 \\ (A_1 - A'') r'' + \frac{A_1}{r''^2} = 0. \end{cases}$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt, dass die Koeffizienten

$$(7.) \dots \dots \dots \begin{cases} A_0 & A_2 & A_3 & A_4 \dots \text{und} \\ A_0 & A_2 & A_3 & A_4 \dots \end{cases}$$

sämtlich Null sein müssen, während sich aus den beiden letzten Gleichungen für A_1 und A_1 die Werte ergeben:

$$(8.) \dots \dots \dots \begin{cases} A_1 = \frac{A'' r''^3 - A' r'^3}{r''^3 - r'^3} \\ A_1 = \frac{(A' - A'') r'^3 \cdot r''^3}{r''^3 - r'^3}. \end{cases}$$

Die gesuchte Funktion $W(r\mu)$ lautet demnach, wenn wir in Gleichung (6.) die Werte (7.) und (8.) eintragen und wieder $P_{11}(\mu) = \sqrt{1 - \mu^2} = \sin \omega$ setzen:

$$(9.) \dots W = \left\{ \frac{A'' r''^3 - A' r'^3}{r''^3 - r'^3} + \frac{A' - A''}{r''^3 - r'^3} \cdot \left(\frac{r' r''}{r} \right)^3 \right\} r \sin \omega.$$

Der Klammerfaktor stellt die Winkelgeschwindigkeit im Punkte $(r\omega\varphi)$ vor; sie ist nur von r abhängig, kommt also sämtlichen Punkten $(r\omega\varphi)$, welche auf derselben Kugelfläche

vom Radius r liegen, in gleicher Weise zu. Wir gelangen so zu folgendem

Resultat: Während des auf die angegebene Weise entstandenen stationären Zustandes geht die Bewegung der Flüssigkeit in der Art vor sich, dass sich die letztere in lauter unendlich dünne konzentrische Kugelschalen spaltet und diese Schalen wie starre Körper mit konstanter Geschwindigkeit rotieren. Die Winkelgeschwindigkeit einer solchen Schale ist durch die Funktion

$$\frac{A''r''^3 - A'r'^3}{r''^3 - r'^3} + \frac{A' - A''}{r''^3 - r'^3} \cdot \left(\frac{r'r''}{r}\right)^3$$

angegeben; dabei bedeutet r den Radius der unendlich dünnen Schale, ferner r' und r'' die Radien der Begrenzungsflächen und endlich A' und A'' die gegebenen konstanten Winkelgeschwindigkeiten der letzteren.

Mit $r = r'$ beziehungsweise $r = r''$ geht obiger Ausdruck thatsächlich in A' beziehungsweise A'' über.

3). Einige Spezialisierungen.

Wir betrachten noch kurz einige spezielle Fälle.

1). Es sei $A' = A'' = A$, d. h. es bewegen sich beide Begrenzungsflächen im selben Drehungssinn mit derselben Winkelgeschwindigkeit A . Hierfür ergibt sich aus obiger allgemeiner Formel für die Winkelgeschwindigkeit der einzelnen Kugelflächen, in welche sich die Flüssigkeit spaltet, ebenfalls A , d. h. Begrenzungsflächen samt Flüssigkeit rotieren mit der Winkelgeschwindigkeit A wie ein einziger starrer Körper.

2). Es sei $A'' = -A'$, d. h. die eine Kugelfläche rotiere mit der gleichen aber entgegengesetzt gerichteten Winkelgeschwindigkeit, wie die andere. In diesem Falle ergibt sich für die Winkelgeschwindigkeit einer beliebigen Flüssigkeitskugelfläche:

$$\frac{A'}{r''^3 - r'^3} \left\{ 2 \left(\frac{r'r''}{r} \right)^3 - (r'^3 + r''^3) \right\}.$$

Offenbar muss es hier eine Kugelfläche geben, welche in Ruhe bleibt, welche nämlich den Übergang der Rotation von der einen zur andern Richtung bildet. Der Radius derselben wird erhalten, wenn man vorstehenden Ausdruck gleich Null setzt. Hieraus ergibt sich der gewünschte Wert von

$$r = r' r'' \sqrt[3]{\frac{2}{r'^3 + r''^3}}.$$

Zwei weitere spezielle Fälle entstehen dadurch, dass man das einmal den Radius der inneren begrenzenden Kugelfläche unendlich klein, d. h. Null werden lässt, und das anderemal dem Radius der äusseren Begrenzungsfläche einen unendlich grossen Wert erteilt. So entsteht im ersten Fall eine mit Flüssigkeit erfüllte Vollkugel, im zweiten Fall erfüllt die Flüssigkeit den ganzen unendlichen Aussenraum einer gegebenen Kugelfläche. Diese beiden Probleme lassen sich folgendermassen mathematisch formulieren:

I. Fall: Es soll eine innerhalb einer gegebenen Kugelfläche vom Radius r' eindeutige und stetige Funktion $W(r, \mu) = \frac{G(r, \mu)}{r}$ ermittelt werden, welche der Differentialgleichung

$$(1.) \quad r^2 \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial G}{\partial \mu} \right) - \frac{G}{1 - \mu^2} = 0$$

genügt und ausserdem am Rande der Kugel den Wert:

$$W(r', \mu) = r' A' \sin \omega \text{ besitzt.}$$

II. Fall: Es soll eine Funktion $W(r, \mu) = \frac{G(r, \mu)}{r}$, welche im ganzen unendlichen Aussenraum einer Kugelfläche vom Radius r' eindeutig und stetig ist, derart ermittelt werden, dass sie der obigen Differentialgleichung (1.) genügt und ausserdem am Rande der genannten Kugelfläche den Wert:

$$W(r', \mu) = r' A' \sin \omega \text{ besitzt.}$$

Die Lösungen beider Probleme sind ganz analog der im gegenwärtigen Paragraphen angegebenen Lösung des allgemei-

neren Falles. Sie unterscheiden sich nur darin von jener, dass, während damals die unbekannte Funktion in eine nach steigenden und fallenden Potenzen von r fortschreitende Reihe entwickelt wurde, gegenwärtig die Funktion im ersten Fall nur nach steigenden, im zweiten Fall nur nach fallenden Potenzen von r entwickelt zu denken ist. Es ergibt sich dies nach Sätzen der Funktionentheorie aus den Stetigkeitsbedingungen der Funktion W . Im übrigen verläuft die Rechnung analog wie oben durchgeführt wurde. Man erhält als Resultate:

$$W = A' r \sin \omega$$

für das erste Problem und

$$W = \frac{A' r'^3 \sin \omega}{r^2}$$

für das zweite Problem, welche sich übrigens auch aus dem unter (9.) angegebenen allgemeinen Wert von W durch entsprechende Grenzübergänge ableiten lassen.

Im ersten Fall ist also die Winkelgeschwindigkeit A' , d. h. die ganze Flüssigkeit rotiert wie ein einziger starrer Körper. Im zweiten Fall hat sie den von r abhängigen Wert $A' \left(\frac{r'}{r}\right)^3$, d. h. der von der Flüssigkeit erfüllte Aussenraum der Kugel spaltet sich in lauter unendlich dünne konzentrische Kugelschalen, die wie starre Körper rotieren. Ihre Winkelgeschwindigkeit nimmt mit wachsendem Radius proportional der dritten Potenz des Radius ab.

§. 4.

Konfokale Rotationsellipsoide als Begrenzungsflächen.

Um den Anfangspunkt O des Koordinatensystems (xyz) sind zwei verlängerte konfokale Rotationsellipsoide mit der x Achse als Rotationsachse beschrieben. Die Brennpunkts-

distanz sei $2a$, ihre Parameter seien ϱ' und ϱ'' ; unter den letzteren sind die Ausdrücke $\frac{\Gamma'}{a}$ und $\frac{\Gamma''}{a}$ zu verstehen, wenn Γ' und Γ'' diejenigen halben Achsenlängen der Ellipsoide bedeuten, welche auf der Rotationsachse liegen. Der schalenförmige Raum zwischen beiden Flächen ist wiederum mit inkompressibler Flüssigkeit erfüllt. An Stelle der rechtwinkligen Koordinaten (xyz) eines beliebigen Flüssigkeitsteilchens werden wir hier die elliptischen Koordinaten $(\varrho \omega \varphi)$ als die geeignetsten einführen, wo ω die sogenannte exzentrische Anomalie bedeutet und unter φ der Winkel der Meridianebene des Punktes gegen die Anfangsmeridianebene (xy Ebene) zu verstehen ist. Die Relationen, welche zum elliptischen Koordinatensystem überleiten, sind:

$$\begin{cases} x = a \varrho \cos \omega \\ y = a \sqrt{\varrho^2 - 1} \sin \omega \cos \varphi \\ z = a \sqrt{\varrho^2 - 1} \sin \omega \sin \varphi. \end{cases}$$

1). Übertragung der Differentialgleichungen (A.) auf die elliptischen Koordinaten.

In erster Linie müssen die Differentialgleichungen (A.) pag. 6 auf die neuen Koordinaten transformiert werden. Aus obigen Relationen ergibt sich, wenn wir der Abkürzung wegen die Grösse

$$\begin{aligned} \sqrt{\varrho^2 - 1} &= \lambda, \text{ also} \\ \varrho d\varrho &= \lambda d\lambda \end{aligned}$$

setzen, durch Differentiation:

$$\begin{cases} dx = a \cos \omega d\varrho & - a \varrho \sin \omega d\omega \\ dy = \frac{a\varrho}{\lambda} \sin \omega \cos \varphi d\varrho + a\lambda \cos \omega \cos \varphi d\omega & - a\lambda \sin \omega \sin \varphi d\varphi \\ dz = \frac{a\varrho}{\lambda} \sin \omega \sin \varphi d\varrho + a\lambda \cos \omega \sin \varphi d\omega & + a\lambda \sin \omega \cos \varphi d\varphi. \end{cases}$$

Die Auflösung dieses Systems nach den Zunahmen der neuen Variablen gibt, wenn wir dabei von der abkürzenden Bezeichnung $\cos \omega = \mu$ Gebrauch machen:

$$\begin{cases} a(\varrho^2 - \mu^2) d\varrho = \lambda^2 \cos \omega dx + \lambda \varrho \sin \omega \cos \varphi dy + \lambda \varrho \sin \omega \sin \varphi dz \\ a(\varrho^2 - \mu^2) d\omega = -\varrho \sin \omega dx + \lambda \cos \omega \cos \varphi dy + \lambda \cos \omega \sin \varphi dz \\ a \lambda \sin \omega d\varphi = 0 - \sin \varphi dy + \cos \varphi dz, \end{cases}$$

woraus sich die folgenden partiellen Differentialquotienten ablesen lassen:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varrho}{\partial x} = \frac{\lambda^2 \cos \omega}{a(\varrho^2 - \mu^2)}; & \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{-\varrho \sin \omega}{a(\varrho^2 - \mu^2)}; & \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \varrho}{\partial y} = \frac{\lambda \varrho \sin \omega \cos \varphi}{a(\varrho^2 - \mu^2)}; & \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\lambda \cos \omega \cos \varphi}{a(\varrho^2 - \mu^2)}; & \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{-\sin \varphi}{a \lambda \sin \omega} \\ \frac{\partial \varrho}{\partial z} = \frac{\lambda \varrho \sin \omega \sin \varphi}{a(\varrho^2 - \mu^2)}; & \frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{\lambda \cos \omega \sin \varphi}{a(\varrho^2 - \mu^2)}; & \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\cos \varphi}{a \lambda \sin \omega}. \end{cases}$$

Durch die Transformation wird der Druck p und die Geschwindigkeit W von den neuen Koordinaten $(\varrho \omega \varphi)$ abhängig gemacht. Dabei ist aber darauf zu achten, dass beide Funktionen, p und W , wiederum von φ unabhängig sind. Wir erhalten also mit Hilfe vorstehender Relationen:

$$(\alpha.) \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial \varrho} \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} = \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho} \varrho \sin \omega + \frac{\partial p}{\partial \omega} \cos \omega \right) \frac{\lambda \cos \varphi}{a(\varrho^2 - \mu^2)} \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial \varrho} \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z} = \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho} \varrho \sin \omega + \frac{\partial p}{\partial \omega} \cos \omega \right) \frac{\lambda \sin \varphi}{a(\varrho^2 - \mu^2)}. \end{cases}$$

Die Klammergrösse ist beidemal dieselbe. Der Laplacesche Ausdruck $\Delta f(xyz)$ lautet, auf elliptische Koordinaten transformiert:

$$\Delta f(xyz) \equiv \frac{1}{a^2(\varrho^2 - \mu^2)} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial f}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{1 - \mu^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right] - \left[\frac{\partial}{\partial \varrho} \left((1 - \varrho^2) \frac{\partial f}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{1 - \varrho^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right] \right\}.$$

Bilden wir hiernach die Ausdrücke $\Delta(-W \sin \varphi)$ und $\Delta(W \cos \varphi)$ unter Beachtung, dass W nur von ϱ und μ , nicht aber von φ abhängt, so erhalten wir die Werte:

$$(\beta.) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta(-W \sin \varphi) &\equiv \frac{-\sin \varphi}{a^2(\varrho^2 - \mu^2)} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial W}{\partial \mu} \right) - \frac{W}{1 - \mu^2} \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{\partial}{\partial \varrho} \left((1 - \varrho^2) \frac{\partial W}{\partial \varrho} \right) - \frac{W}{1 - \varrho^2} \right] \right\} \\ \Delta(W \cos \varphi) &\equiv \frac{\cos \varphi}{a^2(\varrho^2 - \mu^2)} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial W}{\partial \mu} \right) - \frac{W}{1 - \mu^2} \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{\partial}{\partial \varrho} \left((1 - \varrho^2) \frac{\partial W}{\partial \varrho} \right) - \frac{W}{1 - \varrho^2} \right] \right\}, \end{aligned} \right.$$

die sich nur durch die Faktoren $-\sin \varphi$ und $\cos \varphi$ von einander unterscheiden. Durch Einsetzen der Werte $(\alpha.)$ und $(\beta.)$ in die Gleichungen (A.) und durch Elimination von p aus denselben erhält man schliesslich die Gleichung:

$$(I.) \quad \frac{D}{\eta} \cdot \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{a^2(\varrho^2 - \mu^2)} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial W}{\partial \mu} \right) - \frac{W}{1 - \mu^2} \right] \right. \\ \left. - \left[\frac{\partial}{\partial \varrho} \left((1 - \varrho^2) \frac{\partial W}{\partial \varrho} \right) - \frac{W}{1 - \varrho^2} \right] \right\},$$

welche nur W enthält.

2). Untersuchung des stationären Zustandes.

Die beiden Begrenzungsflächen befinden sich wieder, wie seither, mit den konstanten Winkelgeschwindigkeiten A' und A'' in Rotation um die x -Achse. Es soll der stationäre Zustand der Flüssigkeit ermittelt werden. Er ist dadurch charakterisiert, dass W von der Zeit unabhängig, also $\frac{\partial W}{\partial t} = 0$ ist. Infolge davon geht die Differentialgleichung (I.) über in:

$$(1.) \quad \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial W}{\partial \mu} \right) - \frac{W}{1 - \mu^2} = \frac{\partial}{\partial \varrho} \left((1 - \varrho^2) \frac{\partial W}{\partial \varrho} \right) - \frac{W}{1 - \varrho^2}.$$

Hierzu treten noch zwei Randbedingungen. Der Abstand eines beliebigen Oberflächenpunktes $(\varrho' \omega \varphi)$ des Begrenzungs-ellipsoïds, dem der Parameter ϱ' zukommt, von der x Achse ist: $a \sqrt{\varrho'^2 - 1} \sin \omega$, dessen Winkelgeschwindigkeit ist A' , seine Geschwindigkeit beträgt also:

$$a \sqrt{\varrho'^2 - 1} A' \sin \omega.$$

Ebenso ergibt sich für die Geschwindigkeit eines beliebigen Oberflächenpunktes $(\varrho'' \omega \varphi)$ des anderen Ellipsoïds:

$$a \sqrt{\varrho''^2 - 1} A'' \sin \omega.$$

Dies sind aber die Werte, welche die Funktion W annehmen muss, wenn man ϱ in ϱ' beziehungsweise ϱ'' übergehen lässt. Damit ergeben sich für W die weiteren beiden Bedingungen:

$$(2.) \quad \left\{ \begin{array}{l} W(\varrho' \mu) = a \sqrt{\varrho'^2 - 1} A' \sin \omega = a \sqrt{\varrho'^2 - 1} A' \sqrt{1 - \mu^2} \end{array} \right.$$

$$(3.) \quad \left\{ \begin{array}{l} W(\varrho'' \mu) = a \sqrt{\varrho''^2 - 1} A'' \sin \omega = a \sqrt{\varrho''^2 - 1} A'' \sqrt{1 - \mu^2}. \end{array} \right.$$

Die Funktion W hängt ab von den Argumenten ϱ und μ und zwar variiert ϱ zwischen den Grenzen ϱ' und ϱ'' und μ zwischen dem Intervall ± 1 ; ausserdem ist sie, innerhalb dieser Grenzen, wie aus ihrer physikalischen Bedeutung hervorgeht, notwendig eindeutig und stetig. Wir können demnach $W(\varrho \mu)$ entwickeln in eine nach den adjungierten Kugelfunktionen $P_{nj}(\mu)$ fortschreitende Reihe, deren noch unbekannte Koeffizienten Funktionen von ϱ sind; dabei soll j zunächst noch eine beliebige Zahl aus der Reihe 0, 1, 2, 3, . . . vorstellen, über welche wir später in geeigneter Weise verfügen werden. Wir setzen also:

$$(4.) \quad \dots \dots \dots W(\varrho \mu) = \sum_{n=0}^{n=\infty} f_n(\varrho) P_{nj}(\mu)$$

und bilden nun die Differentialquotienten:

$$\frac{\partial W}{\partial \mu} = \sum_{n=0}^{n=\infty} f_n(\varrho) \frac{\partial P_{nj}(\mu)}{\partial \mu} \quad \text{und} \quad \frac{\partial W}{\partial \varrho} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\partial f_n(\varrho)}{\partial \varrho} P_{nj}(\mu).$$

Durch Einsetzen derselben in die Gleichung (1.) erhalten wir:

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1 - \mu^2) \sum_{n=0}^{n=\infty} f_n(\varrho) \frac{\partial P_{nj}(\mu)}{\partial \mu} \right\} - \frac{1}{1 - \mu^2} \sum_{n=0}^{n=\infty} f_n(\varrho) P_{nj}(\mu)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \varrho} \left\{ (1 - \varrho^2) \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\partial f_n(\varrho)}{\partial \varrho} P_{nj}(\mu) \right\} - \frac{1}{1 - \varrho^2} \sum_{n=0}^{n=\infty} f_n(\varrho) P_{nj}(\mu)$$

oder:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial P_{nj}(\mu)}{\partial \mu} \right) - \frac{1}{1 - \mu^2} P_{nj}(\mu) \right\} f_n(\varrho)$$

$$= \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varrho} \left((1 - \varrho^2) \frac{\partial f_n(\varrho)}{\partial \varrho} \right) - \frac{1}{1 - \varrho^2} f_n(\varrho) \right\} P_{nj}(\mu).$$

Nun genügen bekanntlich die adjungierten Kugelfunktionen $P_{nj}(\mu)$ der Gleichung:

$$n(n+1) P_{nj}(\mu) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial P_{nj}(\mu)}{\partial \mu} \right) - \frac{j^2}{1 - \mu^2} P_{nj}(\mu) = 0.$$

Wählen wir $j = 1$, so erhalten wir:

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial P_{n1}(\mu)}{\partial \mu} \right) - \frac{1}{1 - \mu^2} P_{n1}(\mu) = -n(n+1) P_{n1}(\mu);$$

hierdurch nimmt die obige Gleichung die Form an:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ n(n+1) f_n(\varrho) + \frac{\partial}{\partial \varrho} \left((1 - \varrho^2) \frac{\partial f_n(\varrho)}{\partial \varrho} \right) - \frac{1}{1 - \varrho^2} f_n(\varrho) \right\} P_{n1}(\mu) = 0.$$

Diese nach den adjungierten Kugelfunktionen $P_{n1}(\mu)$ fortschreitende Reihe soll verschwinden für alle Werte von μ zwischen $+1$ und -1 ; nach bekannten Sätzen aus der Theorie der Kugelfunktionen müssen deshalb die Koeffizienten der Reihe alle einzeln Null sein. Mit andern Worten: Die unbekannten Funktionen $f_n(\varrho)$ müssen der Differentialgleichung:

$$(5.) \quad n(n+1) f_n(\varrho) + \frac{\partial}{\partial \varrho} \left((1 - \varrho^2) \frac{\partial f_n(\varrho)}{\partial \varrho} \right) - \frac{f_n(\varrho)}{1 - \varrho^2} = 0$$

genügen. Es ist dies die schon in §. 3 genannte Differentialgleichung II. Ordnung, deren partikuläre Integrale die adjungierten Kugelfunktionen erster und zweiter Art

$$P_{n1}(\varrho) \text{ und } Q_{n1}(\varrho)$$

sind. Das vollständige Integral der Differentialgleichung (5.) lautet mithin:

$$f_n(\varrho) = A_n P_{n1}(\varrho) + B_n Q_{n1}(\varrho),$$

wo A_n und B_n unbestimmte Konstanten bedeuten. Zufolge (4.) hat also die Funktion W jetzt folgende Gestalt:

$$(6.) \dots\dots W(\varrho\mu) = \sum_{n=0}^{n=\infty} (A_n P_{n1}(\varrho) + B_n Q_{n1}(\varrho)) P_{n1}(\mu).$$

Zur Ermittlung der unbestimmten Konstanten, welche hierin noch enthalten sind, sind die Randbedingungen (2.) und (3.) zu verwerten. Sie lauten:

$$(2') \dots\dots \left\{ W(\varrho'\mu) = a \sqrt{\varrho'^2 - 1} A' P_{11}(\mu) = C' P_{11}(\mu) \right.$$

$$(3') \dots\dots \left\{ W(\varrho''\mu) = a \sqrt{\varrho''^2 - 1} A'' P_{11}(\mu) = C'' P_{11}(\mu); \right.$$

denn es lässt sich die Wurzelgrösse $\sqrt{1 - \mu^2}$ auch als adjungierte Kugelfunktion auffassen, welche als $P_{11}(\mu)$ zu bezeichnen ist; ferner bedeuten C' und C'' zur Abkürzung gewisse, sofort ablesbare, gegebene Konstanten.

Machen wir jetzt von der ganz allgemein gültigen Darstellung von $W(\varrho\mu)$, wie sie sich in Gleichung (6.) ergeben hat, eine Anwendung auf die speziellen Fälle $\varrho = \varrho'$ und $\varrho = \varrho''$ und ziehen wir dabei die genannten zwei Randbedingungen in Betracht, so erhalten wir die folgenden beiden Gleichungen:

$$\left\{ \begin{aligned} C' P_{11}(\mu) &= \sum_{n=0}^{n=\infty} (A_n P_{n1}(\varrho') + B_n Q_{n1}(\varrho')) P_{n1}(\mu) \text{ und } \\ C'' P_{11}(\mu) &= \sum_{n=0}^{n=\infty} (A_n P_{n1}(\varrho'') + B_n Q_{n1}(\varrho'')) P_{n1}(\mu), \end{aligned} \right.$$

welche für alle Werte von μ zwischen den Grenzen $+1$ und -1 erfüllt sein müssen und aus welchen nach bekannten, schon mehrfach zur Anwendung gebrachten Sätzen die folgenden Bedingungsgleichungen für die noch unbestimmten Koeffizienten A_n und B_n fließen:

$$\begin{cases} A_n P_{n1}(\varrho') + B_n Q_{n1}(\varrho') = 0 \\ A_n P_{n1}(\varrho'') + B_n Q_{n1}(\varrho'') = 0 \end{cases} \text{ für } n = 0, 2, 3, 4, \dots \infty$$

und

$$\begin{cases} A_1 P_{11}(\varrho') + B_1 Q_{11}(\varrho') = C' \\ A_1 P_{11}(\varrho'') + B_1 Q_{11}(\varrho'') = C''. \end{cases}$$

Die A_n und B_n besitzen mithin folgende Werte:

$$(7.) \dots\dots\dots A_n = B_n = 0 \text{ für } n = 0, 2, 3, 4, \dots \infty \text{ und}$$

$$(8.) \dots\dots\dots \begin{cases} A_1 = \frac{C' Q_{11}(\varrho'') - C'' Q_{11}(\varrho')}{P_{11}(\varrho') Q_{11}(\varrho'') - P_{11}(\varrho'') Q_{11}(\varrho')} \\ B_1 = -\frac{C' P_{11}(\varrho'') - C'' P_{11}(\varrho')}{P_{11}(\varrho') Q_{11}(\varrho'') - P_{11}(\varrho'') Q_{11}(\varrho')} \end{cases}$$

und die Funktion W lautet, gemäss (6.), (7.) und (8.):

$$(9.) \dots\dots\dots W(\varrho\mu) = (A_1 P_{11}(\varrho) + B_1 Q_{11}(\varrho)) P_{11}(\mu).$$

Setzen wir an Stelle von $P_{11}(\mu)$ wieder $\sqrt{1-\mu^2}$ oder $\sin \omega$ und schreiben W in der Form:

$$(10.) \dots\dots W(\varrho\mu) = \frac{A_1 P_{11}(\varrho) + B_1 Q_{11}(\varrho)}{a \sqrt{\varrho^2 - 1}} \cdot a \sqrt{\varrho^2 - 1} \sin \omega,$$

so repräsentiert der Bruch die Winkelgeschwindigkeit des Flüssigkeitsteilchens $(\varrho\mu\varphi)$. Diese ist, wie man sieht, von der Koordinate ω unabhängig oder mit andern Worten für jede Ellipsoïdfläche des konfokalen Systems innerhalb der beiden begrenzenden Flächen konstant. Dadurch gelangen wir zu folgendem

Resultat: Während des stationären Zustandes geht die Rotation der Flüssigkeit in der Art vor sich, dass sich die ganze Flüssigkeit in lauter unendlich dünne Ellipsoïdschalen

spaltet, welche unter sich und mit den Begrenzungsflächen konfokal sind und wie starre Körper rotieren. Die Winkelgeschwindigkeit einer solchen Schale vom Parameter ϱ ist:

$$\frac{A_1 P_{11}(\varrho) + B_1 Q_{11}(\varrho)}{a \sqrt{\varrho^2 - 1}},$$

wo die Konstanten A_1 und B_1 die in (8.) angegebenen Werte besitzen.

Mit $\varrho = \varrho'$ beziehungsweise $\varrho = \varrho''$ geht diese Winkelgeschwindigkeit thatsächlich in A' beziehungsweise A'' über.

§. 5.

Exzentrische Kugeln als Begrenzungsflächen.

Als Begrenzungsflächen sind zwei exzentrische Kugelflächen gegeben, von welchen die eine durch die andere vollständig umschlossen wird. Ihre Mittelpunkte befinden sich auf der x Achse. Der schalenförmige Raum ist mit der inkompressibeln Flüssigkeit erfüllt; es soll der stationäre Zustand ermittelt werden für den Fall, dass beide Begrenzungsflächen mit gegebenen konstanten Winkelgeschwindigkeiten um die x Achse rotieren.

Als Koordinatensystem wählen wir hier das der dipolaren Koordinaten $(\vartheta, \omega, \varphi)$.*) Auf der Rotationsachse (x Achse) liegen die beiden Pole in den Entfernungen $\pm a$ vom Ursprung. In jeder beliebigen Meridianebene φ sind zwei orthogonale Kreissysteme vorhanden: die Kreise des einen, dessen Parameter ω ist, gehen durch die beiden Pole; die Kreise des andern, dessen Parameter ϑ ist, umschliessen die Pole exzentrisch. Der Parameter ω variiert von π bis 0 und ϑ von $+\infty$ bis $-\infty$. Die Relationen zwischen den rechtwinkligen Koordinaten

*) Vergl. Carl Neumann, Theorie der Elektrizitäts- und Wärmeverteilung in einem Ringe. Halle 1864. Pag. 5 u. ff., oder: Mathem. Annalen. Bd. 18. Pag. 196.

(xyz) und den dipolaren Koordinaten $(\vartheta \omega \varphi)$ eines Punktes lauten:

$$\begin{cases} x = a \frac{2i \sin(i\vartheta)}{\psi} \\ y = a \frac{2 \sin \omega \cos \varphi}{\psi} \\ z = a \frac{2 \sin \omega \sin \varphi}{\psi} \end{cases}$$

wo $\psi = e^{\vartheta} + e^{-\vartheta} - 2 \cos \omega = 2 \cos i\vartheta - 2 \cos \omega$ ist. Die beiden Begrenzungsflächen sind zwei beliebige, ein und denselben Pol umschliessende ϑ Kugeln des Koordinatensystems.

1). Übertragung der Differentialgleichungen (A.) auf die dipolaren Koordinaten.

Die erste Aufgabe besteht in der Transformation der allgemeinen Differentialgleichungen (A.) pag. 6 auf die neuen Koordinaten $(\vartheta \omega \varphi)$. Aus den obengenannten Relationen erhält man durch Differentiation:

$$\begin{cases} dx = \frac{-2a}{\psi^2} [2(1 - \cos i\vartheta \cos \omega) d\vartheta + 2i \sin i\vartheta \sin \omega d\omega] \\ dy = \frac{2a}{\psi^2} [2i \sin i\vartheta \sin \omega \cos \varphi d\vartheta - 2(1 - \cos i\vartheta \cos \omega) \cos \varphi d\omega \\ \quad - \psi \sin \omega \sin \varphi d\varphi] \\ dz = \frac{2a}{\psi^2} [2i \sin i\vartheta \sin \omega \sin \varphi d\vartheta - 2(1 - \cos i\vartheta \cos \omega) \sin \varphi d\omega \\ \quad + \psi \sin \omega \cos \varphi d\varphi], \end{cases}$$

woraus man durch Auflösung nach den Zunahmen der neuen Variabeln die Gleichungen erhält:

$$\begin{cases} d\vartheta = \frac{1}{a} [- (1 - \cos i\vartheta \cos \omega) dx + i \sin i\vartheta \sin \omega \cos \varphi dy \\ \quad + i \sin i\vartheta \sin \omega \sin \varphi dz] \\ d\omega = \frac{-1}{a} [i \sin i\vartheta \sin \omega dx + (1 - \cos i\vartheta \cos \omega) \cos \varphi dy \\ \quad + (1 - \cos i\vartheta \cos \omega) \sin \varphi dz] \\ d\varphi = \frac{\psi}{2a \sin \omega} [0 - \sin \varphi dy + \cos \varphi dz] \end{cases}$$

Man liest hieraus folgende partielle Differentialquotienten ab:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = -\frac{1 - \cos i \vartheta \cos \omega}{a}; \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} = -\frac{i \sin i \vartheta \sin \omega}{a}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \frac{i \sin i \vartheta \sin \omega \cos \varphi}{a}; \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = -\frac{1 - \cos i \vartheta \cos \omega}{a} \cos \varphi; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\psi}{2a \sin \omega} \sin \varphi \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = \frac{i \sin i \vartheta \sin \omega \sin \varphi}{a}; \quad \frac{\partial \omega}{\partial z} = -\frac{1 - \cos i \vartheta \cos \omega}{a} \sin \varphi; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\psi}{2a \sin \omega} \cos \varphi. \end{array} \right.$$

Da der Druck p vom Drehungswinkel φ unabhängig ist, so ist:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z} \end{array} \right.$$

oder mit Hilfe obiger Relationen:

$$(\alpha.) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\cos \varphi}{a} \left[\frac{\partial p}{\partial \vartheta} (i \sin i \vartheta \sin \omega) - \frac{\partial p}{\partial \omega} (1 - \cos i \vartheta \cos \omega) \right] \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\sin \varphi}{a} \left[\frac{\partial p}{\partial \vartheta} (i \sin i \vartheta \sin \omega) - \frac{\partial p}{\partial \omega} (1 - \cos i \vartheta \cos \omega) \right]. \end{array} \right.$$

Der Laplacesche Differentialausdruck $\Delta f(xyz)$ nimmt bei Überführung in die dipolaren Koordinaten die Gestalt an:

$$\Delta f(xyz) \equiv \frac{\psi^3}{4a^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{1}{\psi} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin \omega} \cdot \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\sin \omega}{\psi} \cdot \frac{\partial f}{\partial \omega} \right) + \frac{1}{\psi \sin^2 \omega} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right\}.$$

Bilden wir hiernach die Ausdrücke $\Delta(-W \sin \varphi)$ und $\Delta(W \cos \varphi)$ unter Beachtung, dass W von φ unabhängig ist, so erhalten wir folgendes:

$$(\beta.) \left\{ \begin{aligned} \Delta(-W \sin \varphi) &\equiv -\frac{\psi^3 \sin \varphi}{4a^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{1}{\psi} \cdot \frac{\partial W}{\partial \vartheta} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sin \omega} \cdot \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\sin \omega}{\psi} \cdot \frac{\partial W}{\partial \omega} \right) - \frac{W}{\psi \sin^2 \omega} \right\} \text{ und} \\ \Delta(W \cos \varphi) &\equiv -\frac{\psi^3 \cos \varphi}{4a^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{1}{\psi} \cdot \frac{\partial W}{\partial \vartheta} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sin \omega} \cdot \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\sin \omega}{\psi} \cdot \frac{\partial W}{\partial \omega} \right) - \frac{W}{\psi \sin^2 \omega} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Trägt man nun die Werte ($\alpha.$) und ($\beta.$) in die Gleichungen (A.) ein und eliminiert den Druck p , so gelangt man zu folgender Gleichung:

$$(I.) \quad \frac{D}{\eta} \cdot \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\psi^3}{4a^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{1}{\psi} \cdot \frac{\partial W}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin \omega} \cdot \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\sin \omega}{\psi} \cdot \frac{\partial W}{\partial \omega} \right) - \frac{W}{\psi \sin^2 \omega} \right\},$$

welche nur W enthält.

2). Untersuchung des stationären Zustandes.

Die Parameter der beiden Begrenzungskugelflächen seien ϑ' und ϑ'' , und A' und A'' seien, wie früher, die gegebenen konstanten Winkelgeschwindigkeiten, mit welchen sie um die x -Achse, ihre Zentrale, rotieren. Da der stationäre Zustand, in welchem $\frac{\partial W}{\partial t} = 0$ ist, betrachtet werden soll, so lautet die Gleichung (I.) einfach:

$$(a.) \quad \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{1}{\psi} \cdot \frac{\partial W}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin \omega} \cdot \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\sin \omega}{\psi} \cdot \frac{\partial W}{\partial \omega} \right) - \frac{W}{\psi \sin^2 \omega} = 0.$$

Um derselben eine für unsere Zwecke bequemere Gestalt zu geben, setzen wir zunächst:

$$(\gamma.) \quad \dots \dots \dots W(\vartheta \omega) = \sqrt{\psi(\vartheta \omega)} \cdot F(\vartheta \omega),$$

wo F eine neue, noch unbekannte Funktion von ϑ und ω bedeuten soll. Dadurch geht die Gleichung (a.) über in:

$$(b.) \quad \dots \dots \dots \frac{\partial^2 F}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \omega^2} + \frac{\cos \omega}{\sin \omega} \cdot \frac{\partial F}{\partial \omega} - \frac{F}{\sin^2 \omega} - \frac{F}{4} = 0.$$

Sodann machen wir noch die zweite Substitution:

$$\cos \omega = \mu$$

und erhalten so die Gleichung:

$$(1.) \dots \frac{\partial^2 F}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial F}{\partial \mu} \right) - \frac{F}{1 - \mu^2} - \frac{F}{4} = 0.$$

Zu dieser Hauptbedingung (1.), welche die Funktion $F = \frac{W}{\sqrt{\psi}}$ erfüllen muss, kommen noch die zwei Randbedingungen:

$$\begin{cases} W(\vartheta' \omega) = \frac{2a \sin \omega}{\psi(\vartheta' \omega)} \cdot A' \\ W(\vartheta'' \omega) = \frac{2a \sin \omega}{\psi(\vartheta'' \omega)} \cdot A'', \end{cases}$$

wobei die beiden Brüche die senkrechten Abstände eines beliebigen Punktes der einen, beziehungsweise der andern Begrenzungsfläche von der Drehachse bedeuten. Auf die Funktion $F(\vartheta \mu)$ übertragen, lauten diese Bedingungen:

$$(2.) \dots \begin{cases} F(\vartheta' \mu) = \frac{2a A' \sqrt{1 - \mu^2}}{\psi^{\frac{3}{2}}(\vartheta' \mu)} \quad \text{und} \\ (3.) \dots \begin{cases} F(\vartheta'' \mu) = \frac{2a A'' \sqrt{1 - \mu^2}}{\psi^{\frac{3}{2}}(\vartheta'' \mu)}. \end{cases} \end{cases}$$

Behufs Integration der Differentialgleichung (1.) setzen wir die Funktion $F(\vartheta \mu) = \Theta(\vartheta) \cdot M(\mu)$, wobei Θ nur von ϑ und M nur von μ abhängen soll, und substituieren dieses Produkt in die Gleichung (1.). Wir erhalten nach Division mit $\Theta \cdot M$ die Gleichung:

$$\frac{1}{\Theta} \cdot \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \vartheta^2} = - \frac{1}{M} \cdot \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial M}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{1 - \mu^2} + \frac{1}{4},$$

welche nur dadurch befriedigt wird, dass man beide Seiten gleich einer und derselben Konstanten setzt, welche wir in der Form $\left(n + \frac{1}{2}\right)^2$ wählen. Es ist also

$$\frac{1}{\Theta} \cdot \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \vartheta^2} = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2$$

oder nach zweimaliger Integration:

$$\Theta = e^{\pm \left(n + \frac{1}{2}\right) \vartheta}.$$

Die Funktion F kann demnach in folgende Reihe entwickelt gedacht werden:

$$(4.) \quad F(\vartheta, \mu) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(f_n(\mu) e^{\left(n + \frac{1}{2}\right) \vartheta} + \varphi_n(\mu) e^{-\left(n + \frac{1}{2}\right) \vartheta} \right),$$

wo $f_n(\mu)$ und $\varphi_n(\mu)$ unbekannte Funktionen von μ vorstellen. Bilden wir nun die Differentialquotienten

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial \vartheta^2} &= \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 f_n(\mu) e^{\left(n + \frac{1}{2}\right) \vartheta} + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \varphi_n(\mu) e^{-\left(n + \frac{1}{2}\right) \vartheta} \right) \\ \frac{\partial F}{\partial \mu} &= \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{\partial f_n(\mu)}{\partial \mu} e^{\left(n + \frac{1}{2}\right) \vartheta} + \frac{\partial \varphi_n(\mu)}{\partial \mu} e^{-\left(n + \frac{1}{2}\right) \vartheta} \right) \end{aligned} \right.$$

und setzen dieselben in die Gleichung (1.) ein, so ergibt sich, wenn wir zugleich nach den Potenzen von e ordnen:

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 f_n(\mu) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial f_n}{\partial \mu} \right) - \frac{f_n(\mu)}{1 - \mu^2} \right. \\ \left. - \frac{f_n(\mu)}{4} \right\} e^{\left(n + \frac{1}{2}\right) \vartheta} + \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \varphi_n(\mu) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial \varphi_n}{\partial \mu} \right) \right. \\ \left. - \frac{\varphi_n(\mu)}{1 - \mu^2} - \frac{\varphi_n(\mu)}{4} \right\} e^{-\left(n + \frac{1}{2}\right) \vartheta}. \end{aligned}$$

In dieser Gleichung müssen die Koeffizienten der Potenzen von e einzeln Null sein, d. h. die Funktionen $f_n(\mu)$ und $\varphi_n(\mu)$ müssen der Differentialgleichung

$$(5.) \dots n(n+1)H + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1-\mu^2) \frac{\partial H}{\partial \mu} \right) - \frac{H}{1-\mu^2} = 0$$

genügen, in der man sich das einmal die Funktion $f_n(\mu)$, das anderemal die Funktion $\varphi_n(\mu)$ gesetzt zu denken hat. Es ist dies die Differentialgleichung der adjungierten Kugelfunktionen $P_{n1}(\mu)$ und $Q_{n1}(\mu)$. Demgemäss stellen sich die Funktionen $f_n(\mu)$ und $\varphi_n(\mu)$ in der Form dar:

$$(6.) \dots \dots \dots \begin{cases} f_n(\mu) = A_n P_{n1}(\mu) + B_n Q_{n1}(\mu) \text{ und} \\ \varphi_n(\mu) = \mathcal{A}_n P_{n1}(\mu) + B_n Q_{n1}(\mu), \end{cases}$$

wo die A_n , B_n , $\mathcal{A}_n$ und B_n unbekannte konstante Koeffizienten bedeuten. Zufolge (4.) und (6.) lautet nun die Funktion F folgendermassen:

$$(7.) \dots F(\vartheta\mu) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ \left(A_n P_{n1}(\mu) + B_n Q_{n1}(\mu) \right) e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta} + \left(\mathcal{A}_n P_{n1}(\mu) + B_n Q_{n1}(\mu) \right) e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta} \right\},$$

eine Darstellung, welche für den ganzen von der Flüssigkeit erfüllten schalenförmigen Raum, also für ϑ innerhalb der Grenzen $\vartheta = \vartheta'$ und $\vartheta = \vartheta''$ und für μ innerhalb des Intervalls $\mu = \pm 1$, Gültigkeit besitzt. Machen wir von dieser allgemeingültigen Formel (7.) eine Anwendung auf die in der Drehachse liegenden Flüssigkeitsteilchen, welche in Ruhe bleiben, so ergibt sich:

$$(8.) \dots 0 = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ \left(A_n P_{n1}(\pm 1) + B_n Q_{n1}(\pm 1) \right) e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta} + \left(\mathcal{A}_n P_{n1}(\pm 1) + B_n Q_{n1}(\pm 1) \right) e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta} \right\}.$$

Da nun zwar die $P_{n1}(\pm 1) = 0$, aber die $Q_{n1}(\pm 1) = \infty$ sind, so kann die Gleichung (8.) und damit auch die Gleichung (7.) nur bestehen, wenn die sämtlichen Koeffizienten B_n und B_n

Null sind. Die Funktion F nimmt somit, wenn wir zugleich nach den Funktionen $P_{n1}(\mu)$ ordnen, die Form an:

$$(9.) \quad F(\vartheta, \mu) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(A_n e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta} + A_n e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta} \right) P_{n1}(\mu) \\ = \sum_{n=0}^{n=\infty} U_n(\vartheta) P_{n1}(\mu),$$

wo zur Abkürzung

$$(10.) \quad \dots \dots \dots A_n e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta} + A_n e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta} = U_n(\vartheta)$$

gesetzt wurde. Es handelt sich nun noch um die Ermittlung der Konstanten A_n und A_n . Wir substituieren zu diesem Zweck die Darstellung (9.) von F in die Randbedingungen (2.) und (3.) und erhalten so die beiden Gleichungen:

$$(11.) \quad \dots \dots \dots \begin{cases} \sum_{n=0}^{n=\infty} U_n(\vartheta') P_{n1}(\mu) = \frac{2a A' \sqrt{1-\mu^2}}{\psi^{\frac{3}{2}}(\vartheta', \mu)} \\ \sum_{n=0}^{n=\infty} U_n(\vartheta'') P_{n1}(\mu) = \frac{2a A'' \sqrt{1-\mu^2}}{\psi^{\frac{3}{2}}(\vartheta'', \mu)}, \end{cases}$$

wo die Funktionen $U_n(\vartheta')$ und $U_n(\vartheta'')$ die Werte besitzen:

$$(12.) \quad \dots \dots \dots \begin{cases} U_n(\vartheta') = A_n e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta'} + A_n e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta'} \quad \text{und} \\ U_n(\vartheta'') = A_n e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta''} + A_n e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta''}. \end{cases}$$

Um nun den Wert der unbekannten Funktion $U_n(\vartheta')$ zu finden, multiplizieren wir die erste der beiden Gleichungen (11.) beiderseits mit dem Faktor $P_{n1}(\mu) d\mu$ und integrieren auf beiden Seiten über μ zwischen den Grenzen $\mu = +1$ und $\mu = -1$.

Wir erhalten dadurch mit Rücksicht auf die Integraleigenschaften der adjungierten Kugelfunktionen, welche lauten:

$$\begin{cases} \int_{-1}^{+1} P_{n1}(\mu) P_{s1}(\mu) d\mu = 0 \text{ (gültig für } n \text{ verschieden von } s) \text{ und} \\ \int_{-1}^{+1} (P_{n1}(\mu))^2 d\mu = \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{II(n+1)}{II(n-1)} \end{cases}$$

(wo II die Gauss'sche Funktion vorstellt, welche für positive ganze Zahlen n die Werte $n!$ besitzt) die folgende Gleichung:

$$(13a.) \quad \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{II(n+1)}{II(n-1)} U_n(\vartheta') = 2a A' \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\psi^{\frac{3}{2}}(\vartheta' \mu)} P_{n1}(\mu) d\mu.$$

Analog ergibt sich für die Funktion $U_n(\vartheta'')$ der Wert:

$$(13b.) \quad \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{II(n+1)}{II(n-1)} U_n(\vartheta'') = 2a A'' \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\psi^{\frac{3}{2}}(\vartheta'' \mu)} P_{n1}(\mu) d\mu.$$

Substituiert man diese Werte von $U_n(\vartheta')$ und $U_n(\vartheta'')$ in die Relationen (12.), so lassen sich die unbekannten Konstanten A_n und A'_n berechnen. Die Funktion $W(\vartheta \omega)$, um deren Bestimmung es sich eigentlich handelt, lautet nun gemäss (7.) und (9.):

$$(14.) \quad W(\vartheta \omega) = V \bar{\psi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta} + A'_n e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta} \right) P_{n1}(\cos \omega).$$

Schreiben wir sie in der Form:

$$(15.) \quad W(\vartheta \omega) = \left\{ \frac{\psi^{\frac{3}{2}}}{2a \sin \omega} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta} + A'_n e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta} \right) P_{n1}(\cos \omega) \right\} \frac{2a \sin \omega}{\psi},$$

so können wir das folgende Resultat ablesen:

Die Winkelgeschwindigkeit der rotierenden Flüssigkeit ist durch die Funktion

$$\frac{(2 \cos(i\vartheta) - 2 \cos \omega)^{\frac{3}{2}}}{2a \sin \omega} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n e^{\left(n + \frac{1}{2}\right)\vartheta} + A_n e^{-\left(n + \frac{1}{2}\right)\vartheta} \right) P_{n1}(\cos \omega)$$

repräsentiert, wobei die A_n und A_n gewisse Konstante bedeuten, welche sich mit Hilfe der Gleichungen (12.) und (13.) berechnen lassen. Sie ist abhängig von ϑ und wesentlich auch von ω . Demnach findet eine Spaltung der Flüssigkeit in gewisse unendlich dünne Schalen, wie wir es in den bisher betrachteten Fällen gefunden haben, hier nicht statt.

§. 6.

Der nichtstationäre Zustand beim Cylinder.

Wir stellen uns das folgende, im Eingang des ersten Paragraphen angedeutete Problem. Als Begrenzungsflächen sind, wie in §. 2 auseinandergesetzt wurde, zwei koaxiale Kreiscylinderflächen gegeben, welche mit konstanten Winkelgeschwindigkeiten A' und A'' rotieren. Im Gegensatz zu dem Früheren ist nun der Zustand der Flüssigkeit zu Beginn der Bewegung durch die gegebene Funktion $F(r)$ charakterisiert, d. h. im Momente $t = 0$ ist die Geschwindigkeit im Punkte $(x r \varphi)$ durch $F(r)$ gegeben. Es soll der nun entstehende, nicht stationäre Zustand der Flüssigkeit ermittelt werden.

Übertragen wir die Aufgabe auf das rein mathematische Gebiet, so wird sie folgendermassen lauten:

Es soll eine Funktion $W(r t)$ gefunden werden, welche folgenden vier Bedingungen genügt:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a.)} \dots\dots\dots -\frac{D}{\eta} \cdot \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial W}{\partial r} \right) - \frac{W}{r^2} = 0 \\ \text{(b.)} \dots\dots\dots W(r't) = r' A' \\ \text{(c.)} \dots\dots\dots W(r''t) = r'' A'' \\ \text{(d.)} \dots\dots\dots [W(rt)]_{t=0} = F(r). \end{array} \right.$$

Was die Art und Weise anlangt, in welcher die gesuchte Funktion W von der Zeit t abhängt, so lassen sich folgende Schlüsse ziehen. Die in gleicher Weise fortdauernde Einwirkung der rotierenden Begrenzungsflächen wird allmählich den von uns schon untersuchten stationären Zustand der Flüssigkeit herzustellen suchen trotz des gegebenen, durch die Funktion $F(r)$ charakterisierten Anfangszustandes. Der letztere wird gewissermassen eine störende Wirkung auf jenes Bestreben ausüben; er wird verhindern, dass jener stationäre Zustand, welchen wir mit W_0 bezeichnen, ohne weiteres eintritt. Aber diese Wirkung wird um so schwächer werden, je länger die Bewegung andauert, je mehr also t wächst, bis schliesslich für einen genügend grossen Wert von t die störende Wirkung verschwindend klein geworden ist; damit ist dann jener stationäre Zustand W_0 doch erreicht. Mit andern Worten: die Funktion W wird sich mit wachsender Zeit der Funktion W_0 nähern. Dementsprechend zerlegen wir W in zwei additive Teile, in den von der Zeit unabhängigen Teil W_0 und einen neuen, noch unbekannten Teil Ω , der von der Zeit abhängig ist:

$$(7.) \dots\dots\dots W(rt) = W_0(r) + \Omega(rt).$$

Diese Substitution bringt, wie wir sofort sehen werden, den Vorteil mit sich, dass sie die Bedingungen (b.) und (c.) einfacher gestaltet. Die Funktion $W_0(r)$, welche dem stationären Zustand entspricht und somit die oben in §. 2 unter (7) dargestellte Funktion bedeutet, genügt, wie wir aus §. 2 wissen, den Bedingungen:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_0) \dots \dots \dots - \frac{D}{\eta} \cdot \frac{\partial W_0}{\partial t} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial W_0}{\partial r} \right) - \frac{W_0}{r^2} = 0 \\ (b_0) \dots \dots \dots W_0(r') = r' A' \\ (c_0) \dots \dots \dots W_0(r'') = r'' A'' . \end{array} \right.$$

Das Glied $\frac{D}{\eta} \cdot \frac{\partial W_0}{\partial t}$, das wegen der Unabhängigkeit der Funktion W_0 von t den Wert Null hat, wurde nur der Symmetrie mit der für W geltenden Differentialgleichung (a.) wegen hinzugefügt. Denken wir uns nun in den erstgenannten vier Bedingungen (a.), (b.), (c.), (d.), welchen W genügt, die Substitution (γ) ausgeführt und subtrahieren sodann von ihnen die drei Bedingungen (a_0), (b_0), (c_0), wie sie für W_0 gelten, in entsprechender Weise, alsdann ergeben sich, wenn wir zugleich die Konstante $\frac{\eta}{D}$ mit ε bezeichnen, zur Bestimmung der neu eingeführten unbekannten Funktion $\Omega(rt)$ folgende vier Bedingungen:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1.) \dots \dots \dots - \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) - \frac{\Omega}{r^2} = 0 \\ (2.) \dots \dots \dots \Omega(r't) = 0 \\ (3.) \dots \dots \dots \Omega(r''t) = 0 \\ (4.) \dots \dots \dots [\Omega(rt)]_{t=0} = F(r) - W_0(r) . \end{array} \right.$$

Hier sind nun die Bedingungen (2.) und (3.) einfacher gestaltet, als dies bei der Funktion W der Fall war. Um die Differentialgleichung (1.) zu integrieren, setzen wir die Funktion

$$\Omega(t, r) = T(t) \cdot R(r),$$

wo T nur von t und R nur von r abhängen soll, und substituieren dieses Produkt in die Gleichung (1.). Wir erhalten;

$$- \frac{1}{\varepsilon} \cdot R \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{T}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) - \frac{T \cdot R}{r^2} = 0$$

oder nach Division mit $T \cdot R$:

$$\frac{1}{\varepsilon T} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r R} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} .$$

Aus den Voraussetzungen über die Funktionen T und R folgt, dass beide Seiten dieser Gleichung einer und derselben Konstanten gleich sein müssen, welche wir in der Form $-h^2$ wählen. Es ist also:

$$\frac{1}{T} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = -h^2 \varepsilon \text{ oder}$$

$$T = e^{-h^2 \varepsilon t}, \text{ also}$$

$$(5.) \dots \dots \dots \Omega(r, t) = e^{-h^2 \varepsilon t} \cdot R(r),$$

wo h eine willkürliche Konstante vorstellt.

Es nähert sich also die Funktion Ω mit wachsender Zeit dem Wert Null, wie dies nach den früheren Überlegungen auch der Fall sein muss. Weiterhin ist auch:

$$\frac{1}{rR} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} = -h^2 \text{ oder:}$$

$$h^2 R + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) - \frac{R}{r^2} = 0.$$

Diese Differentialgleichung zur Ermittlung der unbekannten Funktion $R(r)$ lässt sich auch schreiben:

$$(6.) \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial R}{\partial r} + \left(h^2 - \frac{1}{r^2} \right) R(r) = 0 \text{ oder:} \\ \frac{\partial^2 R}{\partial (hr)^2} + \frac{1}{hr} \cdot \frac{\partial R}{\partial (hr)} + \left(1 - \frac{1}{(hr)^2} \right) R = 0. \end{array} \right.$$

Man erkennt hieraus, dass die willkürliche Konstante h bloss als Faktor der Variablen r auftritt, und dass somit die Funktion R vom Argumente (hr) abhängt. Um diesen Faktor h auch im Funktionszeichen anzudeuten, werden wir die Funktion R genauer als Funktion R_h bezeichnen. Die beiden partikulären Integrale der vorstehenden Differentialgleichung sind die Bessel'schen (oder Cylinder-) Funktionen $J_1(hr)$ und $Y_1(hr)$. Das vollständige Integral R_h wird demnach sein:

$$(7.) \dots \dots \dots R_h = Y_1(hr) - D_h J_1(hr),$$

wenn wir unter D_h eine willkürliche Konstante verstehen. Die Funktion Ω , oder wie wir genauer schreiben wollen,

$$(8.) \quad \Omega_h = e^{-h^2 \varepsilon t} \cdot R_h(hr) \\ = e^{-h^2 \varepsilon t} (Y_1(hr) - D_h J_1(hr))$$

genügt also der Differentialgleichung (1.); sie ist aber offenbar nicht die einzige Funktion, welche dieser ersten Bedingung genügt. Denn wenn wir an Stelle der willkürlichen Konstanten h immer wieder andere Konstanten $h_1, h_2, h_3, \dots$ wählen, so bekommen wir auch neue Funktionen $\Omega_{h_1}, \Omega_{h_2}, \Omega_{h_3}, \dots$, welche alle der Differentialgleichung (1.) Genüge leisten. Wir können noch weiter gehen und diese verschiedenen Funktionen Ω_h mit willkürlichen Konstanten C_h multiplizieren und zu einer Reihe zusammensetzen und auch diese Reihe

$$(9.) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega = C_h \Omega_h + C_{h_1} \Omega_{h_1} + C_{h_2} \Omega_{h_2} + \dots \text{ oder:} \\ \Omega(rt) = e^{-h^2 \varepsilon t} C_h R_h(hr) + e^{-h_1^2 \varepsilon t} C_{h_1} R_{h_1}(h_1 r) \\ \quad + e^{-h_2^2 \varepsilon t} C_{h_2} R_{h_2}(h_2 r) + \dots \end{array} \right.$$

wird der Differentialgleichung (1.) genügen.

Es handelt sich nun darum, die Funktion Ω durch passende Wahl der Konstanten den übrigen Bedingungen entsprechend einzurichten. Den beiden Bedingungen (2.) und (3.) suchen wir dadurch Genüge zu leisten, dass wir alle einzelnen Funktionen R_h , aus denen sich Ω additiv zusammensetzt, jenen Bedingungen unterwerfen. Wir setzen also fest, es solle:

$$(10.) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_h(hr') \equiv Y_1(hr') - D_h J_1(hr') = 0 \text{ sein und ebenso} \\ R_h(hr'') \equiv Y_1(hr'') - D_h J_1(hr'') = 0, \end{array} \right.$$

welchen Wert auch die Konstante h besitzen möge. Dadurch sind die Bedingungen (2.) und (3.) befriedigt. Durch diese Festsetzungen haben wir aber auch über die bisher willkürlichen Konstanten $h, h_1, h_2, h_3, \dots$ verfügt. Denn durch Eli-

mination der Konstanten D_h aus den Gleichungen (10.) ergibt sich die Relation:

$$(11.) \dots\dots\dots \frac{Y_1(hr')}{Y_1(hr'')} = \frac{J_1(hr')}{J_1(hr'')},$$

welcher die Grössen h Genüge leisten müssen. Mit andern Worten: unter $h, h_1, h_2, h_3, \dots$ sind die unendlich vielen Wurzeln dieser transscendenten Gleichung zu verstehen. Damit sind dann auch die Konstanten D_h fixiert; denn es ist z. B.:

$$(12.) \dots\dots D_{h_2} = \frac{Y_1(h_2 r')}{J_1(h_2 r')} \text{ oder } = \frac{Y_1(h_2 r'')}{J_1(h_2 r'')}.$$

Es erübrigt noch die Erfüllung der vierten Bedingung und dazu stehen die Konstanten $C_h, C_{h_1}, C_{h_2}, \dots$ zu Verfügung, welche noch durchaus willkürlich sind. (Sie tragen die Indices h nur, um ihre Zugehörigkeit zu den Funktionen R_h in der Reihe (9.) anzudeuten.) Zuvor ist aber die Herstellung einer gewissen Integraleigenschaft der Funktionen R_h erforderlich.

Wir wählen zu diesem Zwecke zwei beliebige Funktionen R , etwa R_h und R_{h_1} , aus; sie genügen gemäss (6.) beziehungsweise den beiden folgenden Gleichungen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 R_h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial R_h}{\partial r} + \left(h^2 - \frac{1}{r^2} \right) R_h = 0 \\ \frac{\partial^2 R_{h_1}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial R_{h_1}}{\partial r} + \left(h_1^2 - \frac{1}{r^2} \right) R_{h_1} = 0 \end{array} \right.$$

Multiplizieren wir dieselben mit den Faktoren $-R_{h_1}$ resp. R_h und addieren, so bekommen wir:

$$\left(R_h \frac{\partial^2 R_{h_1}}{\partial r^2} - R_{h_1} \frac{\partial^2 R_h}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{r} \left(R_h \frac{\partial R_{h_1}}{\partial r} - R_{h_1} \frac{\partial R_h}{\partial r} \right) + (h_1^2 - h^2) R_h R_{h_1} = 0.$$

Bezeichnen wir den Ausdruck in der zweiten Klammer kurz mit U , so ist der Ausdruck in der ersten Klammer: $\frac{dU}{dr}$. Die Gleichung lässt sich also abgekürzt auch so schreiben:

$$\frac{dU}{dr} + \frac{1}{r} U + (h_1^2 - h^2) R_h R_{h_1} = 0 \quad \text{oder:}$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} (r U) + (h_1^2 - h^2) R_h R_{h_1} = 0.$$

Multiplizieren wir jetzt beiderseits mit $r dr$:

$$d(r U) + (h_1^2 - h^2) R_h R_{h_1} r dr = 0$$

und integrieren über r zwischen den Grenzen r' und r'' , so erhalten wir:

$$\left[r U \right]_{r'}^{r''} + (h_1^2 - h^2) \int_{r'}^{r''} R_h R_{h_1} r dr = 0$$

oder in ausführlicher Gestalt:

$$\left[r \left(R_h \frac{\partial R_{h_1}}{\partial r} - R_{h_1} \frac{\partial R_h}{\partial r} \right) \right]_{r'}^{r''} + (h_1^2 - h^2) \int_{r'}^{r''} R_h R_{h_1} r dr = 0.$$

Die erste Klammer verschwindet aber, denn sowohl die Funktion R_h als auch R_{h_1} hat, wie wir oben in den Gleichungen (10.) festsetzten, für die Argumente r' und r'' den Wert Null. Es bleibt also die Gleichung:

$$(*) \dots\dots\dots (h_1^2 - h^2) \int_{r'}^{r''} R_h R_{h_1} r dr = 0$$

und sie sagt aus, dass zwei beliebige Funktionen R_h und R_{h_1} stets die folgende Integraleigenschaft besitzen:

$$(13.) \dots\dots\dots \int_{r'}^{r''} R_h R_{h_1} r dr = 0,$$

solange h und h_1 von einander verschieden sind. Ist nämlich $h = h_1$, so ist der Ausdruck (*) Null, ohne dass sich über das Integral etwas aussagen lässt.

Die vierte Bedingung (4.) verlangt nun zufolge (9), dass

für alle Werte von r zwischen den Grenzen r' und r'' die folgende Gleichung statffinde:

$$(14.) \left[\Omega (rt) \right]_{t=0} \equiv C_h R_h + C_{h_1} R_{h_1} + C_{h_2} R_{h_2} + \dots = F(r) - W_0(r).$$

Mit Hilfe der eben entwickelten Integraleigenschaft (13.) der Funktionen R lassen sich jetzt die Werte der Konstanten $C_h, C_{h_1}, C_{h_2} \dots$ leicht angeben. Um beispielsweise den Wert von C_h zu finden, werden wir die Gleichung (14.) mit $R_h \cdot r dr$ multiplizieren und über r zwischen den Grenzen r' und r'' integrieren. Dadurch ergibt sich:

$$C_h \int_{r'}^{r''} (R_h)^2 r dr + 0 + 0 + \dots = \int_{r'}^{r''} (F(r) - W_0(r)) R_h r dr.$$

Also ist:

$$(15.) \dots \left\{ \begin{array}{l} C_h = \frac{\int_{r'}^{r''} (F(r) - W_0(r)) R_h r dr}{\int_{r'}^{r''} (R_h)^2 r dr} ; \text{ analog findet man:} \\ \\ C_{h_1} = \frac{\int_{r'}^{r''} (F(r) - W_0(r)) R_{h_1} r dr}{\int_{r'}^{r''} (R_{h_1})^2 r dr} \\ \\ \dots \end{array} \right.$$

Wir gelangen also zu folgendem

Resultat: Die Geschwindigkeit W der Flüssigkeit an der Stelle (r, μ, φ) ist lediglich Funktion von r und der Zeit t und lautet:

$$W(r, t) = W_0(r) + e^{-h^2 \varepsilon t} C_h R_h + e^{-h_1^2 \varepsilon t} C_{h_1} R_{h_1} + \dots,$$

wobei unter $W_0(r)$ die in §. 2 für den stationären Zustand ermittelte Funktion (7.) zu verstehen ist. Unter den Grössen

$h, h_1, h_2 \dots$ sind die unendlich vielen Wurzeln der transcendente Gleichung (11) verstanden; ferner haben die R_n die Bedeutung (7.) und den Konstanten C_n sind die Werte (15) zu erteilen.

§. 7.

Der nichtstationäre Zustand bei den konzentrischen Kugeln.

Wir stellen uns folgende Aufgabe. Die Flüssigkeit befindet sich in einem beliebigen gegebenen Anfangszustand, d. h. die Geschwindigkeit $W(r, \mu, t)$ hat für $t = 0$ den beliebig gegebenen Wert $F(r, \mu)$, von dem wir nur voraussetzen, dass er innerhalb der Begrenzungsflächen eindeutig und stetig ist. Es soll der Zustand untersucht werden, der entsteht, wenn die beiden Begrenzungsflächen mit den konstanten Winkelgeschwindigkeiten A' und A'' um die x -Achse rotieren, mit andern Worten, es soll die Funktion $W(r, \mu, t)$ unter den genannten Bedingungen berechnet werden.

Nehmen wir zunächst im Speziellen an, der durch die gegebene Funktion $F(r, \mu)$ charakterisierte Anfangszustand der Flüssigkeit sei kein ganz beliebiger, sondern die Flüssigkeit befinde sich in einer dem stationären Zustand analogen, sozusagen schalenweisen, Rotation (bei welcher die Winkelgeschwindigkeit nur von r abhängt), so gestaltet sich die Rechnung ziemlich einfach. Wir setzen also als gegebene Funktion die Funktion:

$$(\alpha.) \dots \dots \dots F(r, \mu) = F(r) \cdot r \sin \omega$$

voraus, wo $F(r)$ die Winkelgeschwindigkeit der Schale vom Radius r bedeutet. Die zu ermittelnde Funktion $W(r, \omega, t)$ muss unter solchen Umständen jedenfalls eine ähnliche Form besitzen:

$$(\beta.) \dots \dots \dots W(r, \omega, t) = W(r, t) \cdot r \sin \omega,$$

wo $W(r, t)$ die gesuchte von der Zeit abhängige Winkelgeschwindigkeit der Schale vom Radius r im vorliegenden

nichtstationären Zustand bedeutet. Die Bedingungen, welchen die Funktion W zu genügen hat, sind die folgenden: erstens muss sie die Differentialgleichung (siehe pag. 15):

$$(a.) \dots - \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial W}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \omega} \cdot \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\sin \omega \frac{\partial W}{\partial \omega} \right) - \frac{W}{\sin^2 \omega} \right\} = 0$$

befriedigen; sodann sind ihre Randwerte:

$$(b.) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} W(r' \omega t) = r' A' \sin \omega \\ (c.) \dots \dots \dots W(r'' \omega t) = r'' A'' \sin \omega. \end{array} \right.$$

Endlich muss:

$$(d.) \dots \dots \dots [W(r \omega t)]_{t=0} = F(r \mu)$$

sein. Vermöge der Gleichungen (α .) und (β .) nehmen diese Bedingungen folgende Form an:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a') \dots - \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial W}{\partial r} = 0 \\ (b') \dots W(r' t) = A' \\ (c') \dots W(r'' t) = A'' \\ (d') \dots [W(r t)]_{t=0} = F(r). \end{array} \right.$$

Auf Grund der Überlegungen auf pag. 42, welche auch auf den vorliegenden Fall zutreffen, machen wir die Substitution:

$$W(r \omega t) = W_0(r \omega) + M(r \omega t) \text{ oder}$$

$$W(r t) r \sin \omega = (W_0(r) + M(r t)) r \sin \omega, \text{ d. h.}$$

$$(\gamma.) \dots \dots \dots W(r t) = W_0(r) + M(r t),$$

wo $W_0(r)$ die auf pag. 21 genannte Winkelgeschwindigkeit des stationären Zustandes bedeutet und $M(r t)$ eine noch unbekannte Funktion vorstellt.

Nun genügt aber die Funktion $W_0(r)$ den folgenden Gleichungen:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a'') \dots - \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial W_0}{\partial t} + \frac{\partial^2 W_0}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial W}{\partial r} = 0 \\ (b'') \dots W_0(r') = A' \\ (c'') \dots W_0(r'') = A''; \end{array} \right.$$

setzen wir daher den Wert (γ) in die Gleichungen (a'), (b'), (c'), (d') ein und subtrahieren von ihnen die entsprechenden Gleichungen (a''), (b'') und (c''), so erhalten wir:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1.) \dots - \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial^2 M}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial M}{\partial r} = 0 \\ (2.) \dots M(r't) = 0 \\ (3.) \dots M(r''t) = 0 \\ (4.) \dots [M(r't)]_{t=0} = F(r) - W_0(r). \end{array} \right.$$

Mittelst einer letzten Substitution:

$$(\delta.) \dots \dots \dots M(r't) = \frac{1}{r} \Omega(r't)$$

geht endlich das System der Bedingungsgleichungen über in:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1') \dots - \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} = 0 \\ (2') \dots \Omega(r't) = 0 \\ (3') \dots \Omega(r''t) = 0 \\ (4') \dots \left[\frac{1}{r} \Omega(r't) \right]_{t=0} = F(r) - W(r). \end{array} \right.$$

Den Betrachtungen auf pag. 43 und 44 zufolge setzen wir:

$$(5.) \dots \dots \dots \Omega(r't) = e^{-h^2 \varepsilon t} \varphi(r),$$

wo h eine beliebige Konstante bedeutet. Dadurch geht die Differentialgleichung ($1'$) über in:

$$(6.) \dots \dots \dots \frac{d^2 \varphi(r)}{dr^2} + h^2 \varphi(r) = 0.$$

Das vollständige Integral derselben ist bekanntlich:

$$(7.) \dots \varphi(r) = \varphi_h(hr) = A_h \cos(hr) + B_h \sin(hr),$$

wo A_h und B_h unbestimmte Konstanten bedeuten. Geben wir h verschiedene Werte, so erhalten wir immer wieder neue Funktionen $\varphi_{h_1}, \varphi_{h_2}, \varphi_{h_3} \dots$, welche der Gleichung (6.) genügen und damit auch neue Funktionen:

$$\begin{cases} \Omega_h = e^{-h^2 \varepsilon t} \varphi_h \\ \Omega_{h_1} = e^{-h_1^2 \varepsilon t} \varphi_{h_1} \\ \Omega_{h_2} = e^{-h_2^2 \varepsilon t} \varphi_{h_2} \\ \dots \end{cases}$$

welche alle die Differentialgleichung (1') befriedigen. Es genügt also auch die Reihe:

$$\begin{aligned} (8.) \dots \Omega &= A_h \Omega_h + A_{h_1} \Omega_{h_1} + A_{h_2} \Omega_{h_2} + \dots \\ &= A_h e^{-h^2 \varepsilon t} \varphi_h + A_{h_1} e^{-h_1^2 \varepsilon t} \varphi_{h_1} + \dots \end{aligned}$$

der Gleichung (1').

Es handelt sich nun um die Erfüllung der drei weiteren Bedingungen, denen Ω unterworfen ist. Zunächst setzen wir fest, es sei:

$$(9.) \dots \begin{cases} \varphi_h(hr') \equiv A_h \cos(hr') + B_h \sin(hr') = 0 \text{ und} \\ \varphi_h(hr'') \equiv A_h \cos(hr'') + B_h \sin(hr'') = 0, \end{cases}$$

was auch h sein möge. Damit sind, wie ein Blick auf (8.) zeigt, die Bedingungen (2') und (3') erfüllt. Ferner lässt sich aus den beiden Gleichungen (9.) das Verhältnis der noch unbestimmten Konstanten A_h und B_h bestimmen. Endlich ergibt sich durch Elimination derselben die Gleichung:

$$(10.) \dots \cos(hr') \sin(hr'') - \cos(hr'') \sin(hr') = 0,$$

welcher Gleichung sämtliche h genügen müssen, d. h. die h sind die unendlich vielen Wurzeln dieser transscendenten Gleichung (10.).

Endlich verlangt die Bedingung (4'), dass gemäss (8.):

$$(11.) \cdot [\Omega(r, t)]_{t=0} = A_h \varphi_h + A_{h_1} \varphi_{h_1} + \dots = r(F(r) - W_0(r))$$

ist. Zur Ermittlung der Konstanten $A_h, A_{h_1}, \dots$ brauchen wir eine gewisse Integraleigenschaft der Funktionen φ_h , welche sich folgendermassen ableiten lässt. Zwei beliebige Funktionen φ_h und φ_{h_1} genügen den Gleichungen [siehe Gleichung (6.) pag. 51]:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \varphi_h}{dr^2} + h^2 \varphi_h = 0 \\ \frac{d^2 \varphi_{h_1}}{dr^2} + h_1^2 \varphi_{h_1} = 0. \end{cases}$$

Multiplizieren wir dieselben mit den Faktoren $-\varphi_{h_1}$ resp. φ_h und addieren, so erhalten wir:

$$\left(\varphi_h \frac{d^2 \varphi_{h_1}}{dr^2} - \varphi_{h_1} \frac{d^2 \varphi_h}{dr^2} \right) + (h_1^2 - h^2) \varphi_h \varphi_{h_1} = 0.$$

Setzt man nun den Ausdruck:

$$\left(\varphi_h \frac{d \varphi_{h_1}}{dr} - \varphi_{h_1} \frac{d \varphi_h}{dr} \right) = U,$$

so ist der obige Klammerausdruck $\frac{dU}{dr}$, so dass die Gleichung lautet:

$$\frac{dU}{dr} + (h_1^2 - h^2) \varphi_h \varphi_{h_1} = 0.$$

Wir multiplizieren nun beiderseits mit dr und integrieren über r von r' bis r'' ; dies ergibt:

$$\left[U(r) \right]_{r'}^{r''} + (h_1^2 - h^2) \int_{r'}^{r''} \varphi_h \varphi_{h_1} dr = 0.$$

Der erste Ausdruck ist aber, wie aus der Bedeutung von U und aus den Gleichungen (9.) hervorgeht, gleich Null, so dass wir haben: es ist stets:

$$(12.) \dots \dots \dots \int_{r'}^{r''} \varphi_h \varphi_{h_1} dr = 0,$$

solange h_1 und h von einander verschieden sind. Ferner lässt sich mittelst (7.) leicht eine Formel für

$$\int_{r'}^{r''} (\varphi_h)^2 dr$$

finden. Hiermit kann jede beliebige Konstante A_h berechnet werden. Wir multiplizieren Gleichung (11.) mit $\varphi_h dr$ und integrieren über r zwischen den Grenzen r' und r'' . Dadurch erhalten wir:

$$A_h \int_{r'}^{r''} (\varphi_h)^2 dr + 0 + 0 + 0 + \dots = \int_{r'}^{r''} r (F(r) - W_0(r)) \varphi_h dr$$

d. h. es ist:

$$(13.) \dots A_h = \frac{\int_{r'}^{r''} r (F(r) - W_0(r)) \varphi_h dr}{\int_{r'}^{r''} (\varphi_h)^2 dr}.$$

Resultat: Die Winkelgeschwindigkeit $W(rt)$ der Schale vom Radius r hat folgenden Wert:

$$W(rt) = W_0(r) + \frac{1}{r} \left\{ A_h e^{-h^2 \varepsilon t} \varphi_h + A_{h_1} e^{-h_1^2 \varepsilon t} \varphi_{h_1} + \dots \right\}.$$

Dabei sind die h die Wurzeln der transscendenten Gleichung (10.) auf pag. 52; ferner sind die Funktionen φ_h in (7.) auf pag. 52 angegeben und endlich haben die Konstanten A_h die Werte (13.).

Der allgemeine Fall.

Wir gehen zur Behandlung des allgemeineren Falles über, wie er schon im Eingang dieses Paragraphen auf Seite 49 angedeutet wurde. Die gegebene Funktion, welche den Anfangs-

zustand darstellt, sei beliebiger Natur, $F(r\mu)$; sie sei nur der einen Bedingung unterworfen, dass sie innerhalb des schalenförmigen Raums eindeutig und stetig ist. Die gesuchte Funktion ist:

$$W(r\mu t) \text{ oder } G(r\mu t) = rW(r\mu t)$$

[siehe die Substitution (γ .) in §. 3 auf pag. 16]. In analytischer Form ist das, was über die Funktion G bekannt ist, in den folgenden Gleichungen enthalten. Sie genügt erstens der Differentialgleichung [siehe Gleichung (I.) pag. 16]:

$$\left. \begin{aligned} \text{(a.)} \quad & -\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \left\{ r^2 \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1-\mu^2) \frac{\partial G}{\partial \mu} \right) - \frac{G}{1-\mu^2} \right\} = 0. \\ \text{Sodann sind die Randbedingungen:} \\ \text{(b.)} \quad & G(r'\mu t) = r'^2 A' \sqrt{1-\mu^2} \text{ und} \\ \text{(c.)} \quad & G(r''\mu t) = r''^2 A'' \sqrt{1-\mu^2}; \\ \text{endlich der Anfangszustand:} \\ \text{(d.)} \quad & [G(r\mu t)]_{t=0} = r \cdot F(r\mu). \end{aligned} \right\}$$

Genau dieselben Überlegungen, welche wir bei der Untersuchung des nichtstationären Zustandes beim Cylinder auf pag. 42 angestellt haben, lassen sich auch hier machen und sie führen zunächst behufs Vereinfachung der Randbedingungen (b.) und (c.) zu der Substitution:

$$(\delta.) \quad \dots \dots \dots G(r\mu t) = G_0(r\mu) + \Omega(r\mu t),]$$

wobei unter $G_0(r\mu) = rW_0(r\mu)$ die von uns im §. 3 ermittelte Funktion verstanden ist, welche den stationären Zustand charakterisiert. Genauer ausgedrückt ist unter W_0 die in §. 3 auf pag. 21 angegebene Funktion (9.) verstanden. Ferner stellt Ω eine neue unbekannte Funktion vor. Die erste Funktion $G_0(r\mu)$ genügt nach den Gleichungen (I.), (2') und (3') auf pag. 16 und 17 den Bedingungen:

$$\begin{aligned} (a_0) \quad & \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial G_0}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \left\{ r^2 \frac{\partial^2 G_0}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial G_0}{\partial \mu} \right) - \frac{G_0}{1 - \mu^2} \right\} = 0 \right. \\ (b_0) \quad & \left. G_0(r' \mu) = r'^2 A' \sqrt{1 - \mu^2} \right. \\ (c_0) \quad & \left. G_0(r'' \mu) = r''^2 A'' \sqrt{1 - \mu^2}. \right. \end{aligned}$$

Das Glied $\frac{\partial G_0}{\partial t}$ in Gleichung (a₀), welches wir nur wegen der Symmetrie mit Gleichung (a.) für den Augenblick hinzugefügt haben, ist eigentlich Null. Denken wir uns nun die Substitution (δ.) in den Gleichungen (a.), (b.), (c.) und (d.) ausgeführt und sodann von jenen in entsprechender Weise die Gleichungen (a₀), (b₀) und (c₀) subtrahiert, so ergeben sich für die neu-eingeführte Funktion Ω folgende vier Bedingungen:

$$\begin{aligned} (1.) \quad & \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \left\{ r^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right) - \frac{\Omega}{1 - \mu^2} \right\} = 0 \right. \\ (2.) \quad & \left. \Omega(r' \mu t) = 0 \right. \\ (3.) \quad & \left. \Omega(r'' \mu t) = 0 \right. \\ (4.) \quad & \left. [\Omega(r \mu t)]_{t=0} = r F(r \mu) - G_0(r \mu) = r (F(r \mu) - W_0(r \mu)). \right. \end{aligned}$$

Wir setzen sodann, was die Abhängigkeit der Funktion Ω von t anlangt, auf Grund von Betrachtungen, welche jenen beim Cylinder auf pag. 43 und 44 angestellten ganz analog sind, entsprechend:

$$(5.) \dots\dots\dots \Omega(r \mu t) = e^{-h^2 \varepsilon t} \cdot \varphi_h(r \mu),$$

wo h eine beliebige Konstante und φ_h eine noch unbekannte Funktion von r und μ vorstellt. Durch Eintragen dieses Wertes in die Differentialgleichung (1.) gewinnen wir für φ_h folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} & h^2 \varphi_h + \frac{1}{r^2} \left\{ r^2 \frac{\partial^2 \varphi_h}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial \varphi_h}{\partial \mu} \right) - \frac{\varphi_h}{1 - \mu^2} \right\} = 0 \text{ oder:} \\ (6.) \dots & r^2 \frac{\partial^2 \varphi_h}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial \varphi_h}{\partial \mu} \right) + \left(h^2 r^2 - \frac{1}{1 - \mu^2} \right) \varphi_h = 0. \end{aligned}$$

Die Funktion W und damit auch G ist ihrer Bedeutung nach in den ihr angewiesenen Grenzen, also innerhalb der Intervalle r' und r'' und $\mu = \pm 1$ eindeutig und stetig; gleiches gilt mithin auch von der Funktion $\varphi_h(r\mu)$. Es ist demnach gestattet, die letztere in eine nach den adjungierten Kugelfunktionen $P_{n1}(\mu)$ fortschreitende Reihe entwickelt zu denken, indem wir:

$$(7.) \dots \dots \varphi_h(r\mu) = \sum_{n=0}^{n=\infty} R_h^{(n)}(r) \cdot P_{n1}(\mu)$$

setzen und dabei unter $R_h^{(n)}(r)$ noch unbekannte Funktionen von r verstehen. Bilden wir nun die Differentialquotienten:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \mu} = \sum_{n=0}^{n=\infty} R_h^{(n)}(r) \frac{\partial P_{n1}(\mu)}{\partial \mu} \quad \text{und} \\ \frac{\partial^2 \varphi_h}{\partial r^2} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\partial^2 R_h^{(n)}(r)}{\partial r^2} P_{n1}(\mu) \end{array} \right.$$

und substituieren diese Werte in die Gleichung (6.), so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \sum_{n=0}^{n=\infty} R_h^{(n)}(r) \frac{\partial P_{n1}(\mu)}{\partial \mu} \right) + r^2 \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\partial^2 R_h^{(n)}(r)}{\partial r^2} P_{n1}(\mu) \\ + \left(h^2 r^2 - \frac{1}{1 - \mu^2} \right) \sum_{n=0}^{n=\infty} R_h^{(n)}(r) P_{n1}(\mu) = 0 \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{n=\infty} \left[r^2 \frac{\partial^2 R_h^{(n)}(r)}{\partial r^2} + h^2 r^2 R_h^{(n)}(r) \right] P_{n1}(\mu) \\ + \sum_{n=0}^{n=\infty} \left[\frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial P_{n1}}{\partial \mu} \right) - \frac{P_{n1}}{1 - \mu^2} \right] R_h^{(n)}(r) = 0. \end{aligned}$$

Beachten wir nun, dass die adjungierten Kugelfunktionen $P_{n1}(\mu)$ der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial P_{n1}}{\partial \mu} \right) - \frac{P_{n1}}{1 - \mu^2} = -n(n+1) P_{n1}(\mu)$$

genügen, so lässt sich die vorstehende Gleichung in der Gestalt schreiben:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ r^2 \frac{\partial^2 R_h^{(n)}}{\partial r^2} + (h^2 r^2 - n(n+1)) R_h^{(n)} \right\} P_{n1}(\mu) = 0.$$

Diese Bedingung muss erfüllt sein für alle Werte von μ zwischen den Grenzen ± 1 und dies hat nach bekanntem Satz zur Folge, dass die unbekannten Funktionen $R_h^{(n)}$ der Bedingung:

$$r^2 \frac{\partial^2 R_h^{(n)}}{\partial r^2} + (h^2 r^2 - n(n+1)) R_h^{(n)} = 0 \quad \text{oder:}$$

$$(8.) \dots (hr)^2 \frac{\partial^2 R_h^{(n)}}{\partial (hr)^2} + ((hr)^2 - n(n+1)) R_h^{(n)} = 0$$

Genüge leisten müssen. Aus der letzteren Form ist zu erkennen, dass h nur in der Verbindung (hr) vorkommt, dass also die Funktionen $R_h^{(n)}$ vom Argument (hr) , das wir in der Folge kurz mit ϱ bezeichnen werden, und ausserdem noch von n abhängen. Die Hervorhebung der Konstanten h in dem Funktionszeichen $R_h^{(n)}$ ist jetzt für den Augenblick überflüssig geworden; wir schreiben deshalb an Stelle von $R_h^{(n)}(hr)$ einfach $R^{(n)}(\varrho)$.

Als nächste Aufgabe liegt uns nun die Integration der Differentialgleichung:

$$8') \dots \varrho^2 \frac{\partial^2 R^{(n)}}{\partial \varrho^2} + (\varrho^2 - n(n+1)) R^{(n)} = 0 \quad \text{vor.}$$

Sie geht mit $n = 0$ über in:

$$(9.) \dots\dots\dots \frac{\partial^2 R^{(0)}}{\partial \varrho^2} + R^{(0)} = 0.$$

Die beiden partikulären Integrale dieser Differentialgleichung sind bekanntlich $\cos \varrho$ und $\sin \varrho$. Es wird sich also vermuten lassen, dass diese Funktionen, vielleicht in geschlossener Form, auch in dem Integral der allgemeinen Gleichung (8') enthalten sind. Wir versuchen demnach die Integration derselben, indem wir:

$$(10.) \dots\dots\dots R^{(n)}(\varrho) = U^{(n)} \cos \varrho + V^{(n)} \sin \varrho$$

setzen, wo $U^{(n)}$ und $V^{(n)}$ unbekannte Funktionen von ϱ vorstellen. Durch Differentiation ergibt sich:

$$(11.) \dots \frac{\partial^2 R^{(n)}}{\partial \varrho^2} = - \left(U^{(n)} \cos \varrho + V^{(n)} \sin \varrho \right) \\ + 2 \left(\frac{\partial V^{(n)}}{\partial \varrho} \cos \varrho - \frac{\partial U^{(n)}}{\partial \varrho} \sin \varrho \right) \\ + \left(\frac{\partial^2 U^{(n)}}{\partial \varrho^2} \cos \varrho + \frac{\partial^2 V^{(n)}}{\partial \varrho^2} \sin \varrho \right).$$

Durch Substitution dieser Werte in die Gleichung (8') erhält man für die unbekannten Funktionen $U^{(n)}$ und $V^{(n)}$ die Bedingungsgleichung:

$$(12.) \dots \left\{ \varrho^2 \frac{\partial^2 U^{(n)}}{\partial \varrho^2} + 2\varrho^2 \frac{\partial V^{(n)}}{\partial \varrho} - n(n+1) U^{(n)} \right\} \cos \varrho \\ + \left\{ \varrho^2 \frac{\partial^2 V^{(n)}}{\partial \varrho^2} - 2\varrho^2 \frac{\partial U^{(n)}}{\partial \varrho} - n(n+1) V^{(n)} \right\} \sin \varrho = 0,$$

welche sich in die beiden folgenden spaltet:

$$(13.) \dots \begin{cases} \varrho^2 \frac{\partial^2 U^{(n)}}{\partial \varrho^2} + 2\varrho^2 \frac{\partial V^{(n)}}{\partial \varrho} - n(n+1) U^{(n)} = 0 \\ \varrho^2 \frac{\partial^2 V^{(n)}}{\partial \varrho^2} - 2\varrho^2 \frac{\partial U^{(n)}}{\partial \varrho} - n(n+1) V^{(n)} = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen lassen sich durch Reihenentwicklung integrieren. Wir denken uns beide Funktionen $U^{(n)}$ und $V^{(n)}$ nach fallenden Potenzen von q entwickelt, setzen also:

$$(14.) \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} U^{(n)}(q) = \sum_{p=0}^{p=\infty} A_p q^{-p} \quad \text{und} \\ V^{(n)}(q) = \sum_{p=0}^{p=\infty} B_p q^{-p}, \end{array} \right.$$

wobei die A und B unbekannte Konstante bedeuten, bilden hieraus die ersten und zweiten Differentialquotienten nach q und setzen die so erhaltenen Grössen in die beiden Gleichungen (13.) ein. Wir erhalten dadurch, wenn wir nach q^{-p} ordnen, folgende zwei Reihen:

$$(15.) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{p=0}^{p=\infty} \left\{ [p(p+1) - n(n+1)] A_p - 2p B_p q \right\} q^{-p} = 0 \quad \text{und} \\ \sum_{p=0}^{p=\infty} \left\{ [p(p+1) - n(n+1)] B_p + 2p A_p q \right\} q^{-p} = 0 \end{array} \right.$$

oder, was dasselbe ist:

$$(16.) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{p=0}^{p=\infty} \left(2p B_p q + (n-p)(n+p+1) A_p \right) q^{-p} = 0 \quad \text{und} \\ \sum_{p=0}^{p=\infty} \left(2p A_p q - (n-p)(n+p+1) B_p \right) q^{-p} = 0. \end{array} \right.$$

In ausführlicher Form und zugleich nach fallenden Potenzen von q geordnet, lauten diese Reihen:

$$(17.) \left\{ \begin{aligned} 0 &= [2 \cdot 1 B_1 + n(n+1) A_0] + [2 \cdot 2 B_2 + (n-1)(n+2) A_1] \varrho^{-1} \\ &\quad + [2 \cdot 3 B_3 + (n-2)(n+3) A_2] \varrho^{-2} \\ &\quad + [2 \cdot 4 B_4 + (n-3)(n+4) A_3] \varrho^{-3} + \dots \\ 0 &= [2 \cdot 1 A_1 - n(n+1) B_0] + [2 \cdot 2 A_2 - (n-1)(n+2) B_1] \varrho^{-1} \\ &\quad + [2 \cdot 3 A_3 - (n-2)(n+3) B_2] \varrho^{-2} \\ &\quad + [2 \cdot 4 A_4 - (n-3)(n+4) B_3] \varrho^{-3} + \dots \end{aligned} \right.$$

Da nun aber sämtliche Koeffizienten beider Reihen Null sein müssen, so erhält man für die A_n und B_n folgende Werte:

$$(18.) \left\{ \begin{aligned} B_1 &= -\frac{n(n+1)}{2 \cdot 1} A_0 \\ A_1 &= \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} B_0 \\ B_2 &= -\frac{(n-1)(n+2)}{2 \cdot 2} A_1 = -\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} B_0 \\ A_2 &= \frac{(n-1)(n+2)}{2 \cdot 2} B_1 = -\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} A_0 \\ B_3 &= -\frac{(n-2)(n+3)}{2 \cdot 3} A_2 = \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{2^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} A_0 \\ A_3 &= \frac{(n-2)(n+3)}{2 \cdot 3} B_2 = -\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{2^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} B_0 \\ &\dots \end{aligned} \right.$$

Die zwei Konstanten A_0 und B_0 bleiben wiederum notwendig willkürlich. Die Funktionen $U^{(n)}(\varrho)$ und $V^{(n)}(\varrho)$ lauten nun zufolge (14.) und (18.):

$$\left\{ \begin{aligned} U^{(n)}(\varrho) &= A_0 + \frac{n(n+1)}{2 \cdot 1} B_0 \varrho^{-1} - \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} A_0 \varrho^{-2} \\ &\quad - \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{2^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} B_0 \varrho^{-3} + \dots - \dots - \dots \\ V^{(n)}(\varrho) &= B_0 - \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} A_0 \varrho^{-1} - \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} B_0 \varrho^{-2} \\ &\quad + \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{2^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} A_0 \varrho^{-3} + \dots - \dots - \dots \end{aligned} \right.$$

Aus dem Bau der Koeffizienten erkennt man, dass diese Reihen nicht ins Unendliche fortlaufen, sondern nach einer bestimmten endlichen Gliederzahl abbrechen, weil von dort an immer die Null als Faktor auftritt. Es sind, wie man erkennt, immer nur $(n+1)$ Terme vorhanden. Bilden wir nun mittelst dieser Funktionen das vollständige Integral $R^{(n)}(\varrho)$ gemäss (10.) und fassen dabei die Glieder, welche mit der Konstanten A_0 beziehungsweise B_0 behaftet sind, zusammen, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 (19.) \quad R^{(n)}(\varrho) = & A_0 \left\{ \cos \varrho - \frac{n(n+1)}{2 \cdot 1} \varrho^{-1} \sin \varrho \right. \\
 & - \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} \varrho^{-2} \cos \varrho \\
 & + \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{2^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} \varrho^{-3} \sin \varrho + \dots - \dots - \dots \left. \right\} \\
 & + B_0 \left\{ \sin \varrho + \frac{n(n+1)}{2 \cdot 1} \varrho^{-1} \cos \varrho \right. \\
 & - \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} \varrho^{-2} \sin \varrho \\
 & - \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{2^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} \varrho^{-3} \cos \varrho + \dots + \dots \left. \right\},
 \end{aligned}$$

wobei wieder zu beachten ist, dass in den Klammern, in welchen die Zahlenkoeffizienten gleicher Potenzen von ϱ abgesehen vom Vorzeichen gleich sind, stets eine begrenzte Zahl von Termen vorhanden ist, so lange n endlich bleibt. Ihre Anzahl beträgt nämlich $(n+1)$; demnach ist der letzte Term beidemal der, welcher die Potenz ϱ^{-n} enthält. Sein Zahlenkoeffizient lautet, abgesehen vom Vorzeichen:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) \dots (2n-2)(2n-1)2n}{2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (n-2)(n-1)n}$$

oder, was dasselbe ist:

$$\frac{II(2n)}{2^n \cdot II(n)},$$

wo II die Gauss'sche Funktion vorstellt. Ausserdem ist dieser Term in der ersten Reihe der Funktion (19.) noch mit $\cos \varrho$ beziehungsweise $\sin \varrho$ behaftet, je nachdem n gerade oder ungerade ist, und in der zweiten Reihe ebenfalls mit $\cos \varrho$ beziehungsweise $\sin \varrho$, je nachdem n ungerade oder gerade ist. Diese Reihen sollen mit $T^{(n)}$ und $S^{(n)}$ bezeichnet werden. Dieselben stellen die beiden partikulären Integrale der Differentialgleichung (8') vor. Die oben ausgesprochene Erwartung, dass sich diese Funktionen mit Hilfe von $\cos \varrho$ und $\sin \varrho$ möchten in geschlossener Form darstellen lassen, hat sich also bestätigt. Kehren wir wieder zum Argument (hr) zurück, so können wir das gewonnene Resultat so aussprechen:

Die beiden partikulären Integrale der gewöhnlichen Differentialgleichung II. Ordnung:

$$(8.) \dots \dots (hr)^2 \frac{\partial^2 R_h^{(n)}}{\partial (hr)^2} + ((hr)^2 - n(n+1)) R_h^{(n)} = 0$$

sind dargestellt durch die Funktionen:

$$(20.) \left\{ \begin{array}{l} S^{(n)}(hr) = \sin(hr) + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} (hr)^{-1} \cos(hr) \\ \quad - \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} (hr)^{-2} \sin(hr) \\ \quad - \dots + \dots + \dots \pm \frac{II(2n)}{2^n \cdot II(n)} (hr)^{-n} \begin{bmatrix} \sin(hr) \\ \cos(hr) \end{bmatrix} \\ T^{(n)}(hr) = \cos(hr) - \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} (hr)^{-1} \sin(hr) \\ \quad - \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} (hr)^{-2} \cos(hr) \\ \quad + \dots + \dots + \dots \pm \frac{II(2n)}{2^n \cdot II(n)} (hr)^{-n} \begin{bmatrix} \cos(hr) \\ \sin(hr) \end{bmatrix}, \end{array} \right.$$

wo in den eckigen Klammern jedesmal der obere beziehungsweise untere Faktor zu nehmen ist, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Im Speziellen ergeben sich hieraus mit $n = 0, 1, \dots$ die Funktionen:

$$(20a.) \quad \begin{cases} S^{(0)}(hr) = \sin(hr) \\ T^{(0)}(hr) = \cos(hr) \end{cases}$$

$$(20b.) \quad \begin{cases} S^{(1)}(hr) = \sin(hr) + (hr)^{-1} \cos(hr) = \frac{(hr) \sin(hr) + \cos(hr)}{(hr)} \\ T^{(1)}(hr) = \cos(hr) - (hr)^{-1} \sin(hr) = \frac{(hr) \cos(hr) - \sin(hr)}{(hr)} \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Das vollständige Integral lautet mithin:

$$(21.) \quad \dots \dots \dots R^{(n)}(hr) = S^{(n)}(hr) - D_h^{(n)} T^{(n)}(hr),$$

wo $D_h^{(n)}$ eine willkürliche Konstante bedeutet. Die Funktion $\varphi_h(r\mu)$ hat somit gemäss (7.) die Form:

$$(22.) \quad \varphi_h(r\mu) = \sum_{n=0}^{n=\infty} R_h^{(n)} P_{n1}(\mu) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(S^{(n)}(hr) - D_h^{(n)} T^{(n)}(hr) \right) P_{n1}(\mu)$$

und in der Funktion Ω oder genauer:

$$(23.) \quad \dots \dots \dots \Omega_h(r\mu t) = e^{-h^2 \varepsilon t} \varphi_h(r\mu)$$

haben wir eine Funktion ermittelt, welche der Differentialgleichung (1.), der Hauptbedingung, genügt. Solcher Funktionen lassen sich aber nunmehr leicht beliebig viele angeben. Wenn wir nämlich an Stelle der willkürlichen Konstanten h immer andere und andere Konstanten $h_1, h_2, h_3, \dots$ setzen, so erhalten wir immer wieder neue Funktionen, welche der Hauptbedingung (1.) Genüge leisten. Wir können schliesslich dieselben mit willkürlichen Konstanten $C_h; C_{h_1}; C_{h_2}; \dots$ multiplizieren und zu einer Reihe zusammensetzen und auch diese Reihe:

$$(24.) \quad \begin{cases} \Omega = C_h \Omega_h + C_{h_1} \Omega_{h_1} + C_{h_2} \Omega_{h_2} + \dots \dots \dots \text{ oder:} \\ \Omega = e^{-h^2 \varepsilon t} C_h \varphi_h + e^{-h_1^2 \varepsilon t} C_{h_1} \varphi_{h_1} + e^{-h_2^2 \varepsilon t} C_{h_2} \varphi_{h_2} + \dots \end{cases}$$

wird der Gleichung (1.) genügen.

denter Gleichungen zu verstehen. Damit sind nun auch die Grössen $D_h^{(n)}$ fixiert; aus (25 a.) folgt nämlich, dass:

$$(27.) \dots D_h^{(n)} = \frac{S^{(n)}(hr')}{T^{(n)}(hr')} \text{ oder } = \frac{S^{(n)}(hr'')}{T^{(n)}(hr'')} \text{ ist.}$$

Nun ist noch die letzte Bedingung (4.) zu befriedigen und dazu dienen die Konstanten $C_h, C_{h_1}, C_{h_2}, \dots$. Ehe es aber möglich ist, diesen Konstanten die geeigneten Werte zu erteilen, ist die Ableitung einer gewissen Integraleigenschaft der Funktionen $\varphi_h(r\mu)$ nötig. Wir greifen zu diesem Zwecke zwei beliebige Funktionen $\varphi_h(r\mu)$ und $\varphi_{h_1}(r\mu)$ heraus; sie genügen gemäss (6.) beziehungsweise den Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} r^2 \frac{\partial^2 \varphi_h}{\partial r^2} + (1 - \mu^2) \frac{\partial^2 \varphi_h}{\partial \mu^2} - 2\mu \frac{\partial \varphi_h}{\partial \mu} + h^2 r^2 \varphi_h - \frac{\varphi_h}{1 - \mu^2} = 0 \\ r^2 \frac{\partial^2 \varphi_{h_1}}{\partial r^2} + (1 - \mu^2) \frac{\partial^2 \varphi_{h_1}}{\partial \mu^2} - 2\mu \frac{\partial \varphi_{h_1}}{\partial \mu} + h_1^2 r^2 \varphi_{h_1} - \frac{\varphi_{h_1}}{1 - \mu^2} = 0. \end{cases}$$

Multiplizieren wir dieselben mit den Faktoren $-\varphi_{h_1}$ resp. φ_h und addieren, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} r^2 \left[\varphi_h \frac{\partial^2 \varphi_{h_1}}{\partial r^2} - \varphi_{h_1} \frac{\partial^2 \varphi_h}{\partial r^2} \right] + (1 - \mu^2) \left[\varphi_h \frac{\partial^2 \varphi_{h_1}}{\partial \mu^2} - \varphi_{h_1} \frac{\partial^2 \varphi_h}{\partial \mu^2} \right] \\ - 2\mu \left[\varphi_h \frac{\partial \varphi_{h_1}}{\partial \mu} - \varphi_{h_1} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \mu} \right] + r^2 (h_1^2 - h^2) \varphi_h \varphi_{h_1} = 0. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir nun das Aggregat

$$\left(\varphi_h \frac{\partial \varphi_{h_1}}{\partial r} - \varphi_{h_1} \frac{\partial \varphi_h}{\partial r} \right)$$

mit U und das Aggregat

$$\left(\varphi_h \frac{\partial \varphi_{h_1}}{\partial \mu} - \varphi_{h_1} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \mu} \right)$$

mit V , alsdann lässt sich vorstehende Gleichung einfach so schreiben:

$$\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial V}{\partial \mu} - 2\mu V \right] + (h_1^2 - h^2) \varphi_h \varphi_{h_1} = 0$$

oder:

$$\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \mu} ((1 - \mu^2) V) + (h_1^2 - h^2) \varphi_h \varphi_{h_1} = 0.$$

Die ganze Gleichung multiplizieren wir mit $dr d\mu$ und integrieren über die betrachtete Schale, d. h. über r von r' bis r'' und über μ von -1 bis $+1$. Im ersten Term lässt sich die Integration nach r , im zweiten die nach μ sofort ausführen, so dass diese Operation ergibt:

$$\int_{-1}^{+1} [U]_{r'}^{r''} d\mu + \int_{r'}^{r''} \frac{1}{r^2} [(1 - \mu^2) V]_{-1}^{+1} dr + (h_1^2 - h^2) \int_{-1}^{+1} \int_{r'}^{r''} \varphi_h \varphi_{h_1} dr d\mu = 0.$$

Beachtet man nun, dass erstens

$$[U]_{r'}^{r''} = \left[\varphi_h \frac{\partial \varphi_{h_1}}{\partial r} - \varphi_{h_1} \frac{\partial \varphi_h}{\partial r} \right]_{r'}^{r''} = 0$$

ist, weil nach (25.) die Funktionen φ_h und φ_{h_1} für die Argumente r' und r'' verschwinden, und dass zweitens

$$\left[(1 - \mu^2) V \right]_{\mu=-1}^{\mu=+1} = 0$$

ist, wie man sofort übersieht, so geht obige Gleichung einfach über in:

$$(h_1^2 - h^2) \int_{-1}^{+1} \int_{r'}^{r''} \varphi_h \varphi_{h_1} dr d\mu = 0$$

und diese Gleichung enthält den Satz: Zwei beliebige Funktionen φ_h und φ_{h_1} besitzen stets die Integraleigenschaft:

$$(28.) \dots \dots \dots \int_{-1}^{+1} \int_{r'}^{r''} \varphi_h \varphi_{h_1} dr d\mu = 0,$$

falls nur h und h_1 von einander verschieden sind.

Kehren wir zur Bedingung (4.) der Funktion Ω zurück, so verlangt dieselbe gemäss (24.), dass

$$(29.) \quad [\Omega(r, \mu, t)]_{t=0} \equiv C_h \varphi_h + C_{h_1} \varphi_{h_1} + C_{h_2} \varphi_{h_2} + \dots = r(F - W_0)$$

sein soll, d. h. dass die Konstanten C dieser Gleichung entsprechende Werte besitzen. Mit Hilfe obiger Integraleigenschaft (28.) ergibt sich nun beispielsweise der Wert von C_h in folgender Weise: wir multiplizieren die Gleichung (29.) mit $\varphi_h dr d\mu$ und integrieren über r und μ zwischen den oben genannten Grenzen. Dadurch ergibt sich unter Anwendung der Formel (28.):

$$C_h \int_{-1}^{+1} \int_{r'}^{r''} \varphi_h^2 dr d\mu + 0 + 0 + \dots = \int_{-1}^{+1} \int_{r'}^{r''} r(F(r, \mu) - W_0(r, \mu)) \varphi_h dr d\mu$$

d. h.:

$$C_h = \frac{\int_{-1}^{+1} \int_{r'}^{r''} r(F - W) \varphi_h dr d\mu}{\int_{-1}^{+1} \int_{r'}^{r''} \varphi_h^2 dr d\mu}.$$

Im Nenner lässt sich die Integration nach μ ausführen. Unter Benützung der Gleichung (22.) lässt sich das Integral im Nenner auch so schreiben:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{r'}^{r''} \left(\sum_{n=0}^{n=\infty} R_h^{(n)} P_{n1}(\mu) \right) \left(\sum_{n=0}^{n=\infty} R_h^{(n)} P_{n1}(\mu) \right) dr d\mu.$$

Denkt man sich nun die Multiplikation der beiden Reihen ausgeführt, so fallen zufolge der ersten Integraleigenschaft der Funktionen $P_{n1}(\mu)$

$$\int_{-1}^{+1} P_{n1}(\mu) P_{s1}(\mu) d\mu = 0 \quad (\text{für } n \text{ nicht} = s)$$

sämtliche Terme weg, in welchen die Indices n der darin auftretenden beiden Funktionen $P_{n1}(\mu)$ voneinander verschieden sind. Es bleiben nur die einfach unendlich vielen Terme übrig, in welchen die Indices n der beiden Kugelfunktionen gleich sind. Gemäss der zweiten Integraleigenschaft derselben

$$\int_{-1}^{+1} P_{n1}(\mu) \cdot P_{n1}(\mu) d\mu = \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{II(n+1)}{II(n-1)}$$

nimmt aber dann das Integral im Nenner die folgende Gestalt an:

$$\int_{-1}^{+1} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{II(n+1)}{II(n-1)} \left(R_h^{(n)}\right)^2 dr$$

oder:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{II(n+1)}{II(n-1)} \int_{r'}^{r''} \left(R_h^{(n)}\right)^2 dr \right\}.$$

Der Wert der Konstanten C_h ist demnach:

$$(30.) \dots C_h = \frac{\int_{-1}^{+1} \int_{r'}^{r''} r (E - W_0) dr d\mu}{\sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{II(n+1)}{II(n-1)} \int_{r'}^{r''} \left(R_h^{(n)}\right)^2 dr \right\}}.$$

In ganz analoger Weise lassen sich die Werte der übrigen Konstanten $C_h, C_{h1}, \dots$ bestimmen.

Wir gelangen so zu dem Resultat: Um die Funktion $W(r\mu t)$ zu finden, verfähre man auf folgende Weise. Man bilde zunächst die Funktionen:

$$(22.) \dots \varphi_h(r\mu) = \sum_{n=0}^{n=\infty} R_h^{(n)}(hr) P_{n1}(\mu) \\ = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(S^{(n)}(hr) - D_h^{(n)} T^{(n)}(hr) \right) P_{n1}(\mu),$$

wo $S^{(n)}(hr)$ und $T^{(n)}(hr)$ die in (20.) auf pag. 63 angegebenen Funktionen bedeuten und die h 's die auf pag. 65 angegebene Bedeutung haben, endlich die Konstanten $D_h^{(n)}$ die Werte (27.) besitzen. Mit Hilfe dieser Funktionen φ_h lässt sich alsdann die Funktion W in folgender unendlicher Reihe angeben:

$$\begin{aligned} W(r, \mu, t) &= \frac{1}{r} G(r, \mu, t) = \frac{1}{r} \left(G_0(r, \mu) + \Omega(r, \mu, t) \right) \\ &= W_0(r, \mu) + \frac{1}{r} \left\{ e^{-h^2 \varepsilon t} C_h \varphi_h + e^{-h_1^2 \varepsilon t} C_{h_1} \varphi_{h_1} + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Hierbei ist unter $W_0(r, \mu)$ die in §. 3 pag. 21 unter (9.) angegebene Funktion zu verstehen; ferner besitzen die Konstanten C_h die unter (30.) angegebenen Werte, wobei $F(r, \mu)$ die gegebene, den Anfangszustand der Flüssigkeit charakterisierende Funktion ist.



Wagner, Carl

Über die Bewegung einer inkompressibeln Flüssigkeit, welche begrenzt ist
von zwei in gegebener Rotation befindlichen Flächen

Stuttgart 1888

Phys.sp. 476 h#Beibd.4

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11902899-4